Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
SoSe 2008 Blatt 17 (Aufgaben 17.1 - 17.4)

Abgabe vor der Vorlesung am **Mittwoch**, den 30.4.2008

Aufgabe 17.1 (Orthogonale Matrizen)

a) Zeige, dass die Matrix $C := \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ orthogonal ist. Benütze diese Eigenschaft, um folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$x + 2y + 2z = 3 \quad , \quad 2x + y - 2z = 6 \quad , \quad -2x + 2y - z = -3 \ .$$

b) Zeige, dass die Matrix $E := \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & -14 & 2 \\ -10 & -5 & -10 \\ 10 & 2 & -11 \end{pmatrix}$ orthogonal ist, und prüfe nach, dass die Spalten und Zeilen orthonormale Basen bilden.

c) Zeige, dass eine Spiegelung der kartesischen Koordinaten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ an der (x, y)-Ebene eine orthogonale Transformation ist, mit Determinante -1.

(5 Punkte)

Aufgabe 17.2 (Unitäre Matrizen)

a) Zeige, dass die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ unitär ist, falls gilt:

$$\overline{a} = \frac{d}{D} \quad , \quad \overline{b} = -\frac{c}{D} \quad , \quad \overline{c} = -\frac{b}{D} \quad , \quad \overline{d} = \frac{a}{D} \ ,$$

wobei $D := ad - bc$.

b) Zeige, dass die Matrix

$$F := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+i) & \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{3+i}{2\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4+3i}{2\sqrt{15}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{5i}{2\sqrt{15}} \end{pmatrix}$$

unitär ist, und prüfe nach, dass die Spalten und Zeilen orthonormale Basen bilden.

c) Zeige, dass das Produkt zweier unitärer Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ wieder eine unitäre Matrix ist.

(4 Punkte)

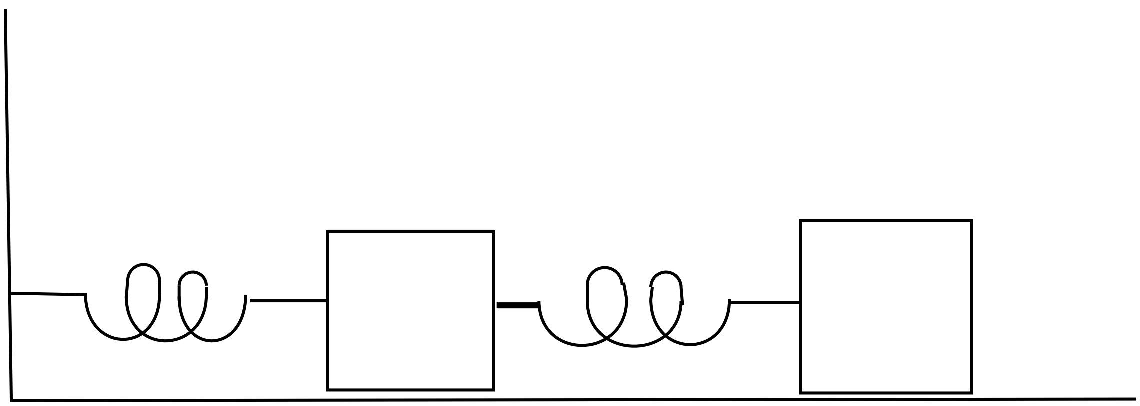
Aufgabe 17.3 (Algebraische Eigenwertprobleme)
Finde die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrizen

$$F := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad G := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad H := \begin{pmatrix} 3 & 1+i & i \\ 1-i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Prüfe nach, dass H hermitesch ist, und dass die Eigenvektoren von H orthogonal sind.

(6 Punkte)

Aufgabe 17.4 (Eigenwerte)
Betrachte die geradlinige Bewegung von zwei gleichen Massen, die untereinander und mit einer starren Wand durch Federn verbunden sind und sich ohne Einwirkung anderer Kräfte horizontal reibungslos bewegen können.



Die Massen seien beide gleich 1, die Federkonstanten seien 3 und 2. Ferner seien u_1 und u_2 die horizontalen Abweichungen der beiden Massen von der Ruhelage. Die Regeln der Mechanik ergeben, dass die Bewegungen des Systems durch die Lösungen des folgenden Systems von zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung beschrieben werden:

$$\begin{aligned} u_1'' &= -5u_1 + 2u_2 \\ u_2'' &= 2u_1 - 2u_2 \end{aligned}$$

i) Zeige: Der Lösungsansatz

$$u_1 = x_1 \cos \omega t \quad , \quad u_2 = x_2 \cos \omega t$$

führt auf ein homogenes System von 2 linearen Gleichungen für die zwei Unbekannten x_1, x_2, welches als Parameter die noch zu bestimmende Eigenfrequenz ω enthält.

ii) Bestimme die ω, für die dieses System eine nichttriviale Lösung hat.

iii) Bestimme die Lösungen für u_1 und u_2.

iv) Führe die analogen Überlegungen durch für $u_i = x_i \sin \omega t$.

v) Beweise, dass alle Linearkombinationen der so erhaltenen Lösungen des Differentialgleichungssystems wieder Lösungen sind. (Bemerkung: man kann zeigen, dass man damit alle Lösungen erhält. Das Beispiel zeigt, wie Schwingungsprobleme auf das Eigenwertproblem führen: die ω^2 sind *Eigenwerte*).

(5 Punkte)