Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
SoSe 2008 Blatt 16 (Aufgaben 16.1 - 16.5)

Abgabe vor der Vorlesung am 24.4.2008

Aufgabe 16.1 (Gleichungssysteme und inverse Matrix)

Betrachte die 3×3–Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3/5 & -20/65 & 48/65 \\ 4/5 & 15/65 & -36/65 \\ 0 & 12/13 & 5/13 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

a) Zeige, dass die Spalten von A eine orthonormale Basis bilden (die Zeilen auch?).

b) $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ sei die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Bestimme $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ und $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$, die die Gleichungssysteme $Av_i = e_i$ und $Bw_i = e_i$ $(i = 1, 2, 3)$ lösen.

c) Berechne A^{-1} und B^{-1}.

(4 Punkte)

Aufgabe 16.2 (Orthogonale Abbildungen)

a) Sei $\langle\ ,\ \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$. Welche Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ erfüllen $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$?
(Bedingungen $(a_{11})^2 + (a_{21})^2 = \ldots$ usw. angeben für die Komponenten $(A)_{ij} = a_{ij}$.)

b) Sei $\varphi \in [0, 2\pi)$. Bestimme eine Matrix $D_{z,\varphi} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$, die bezüglich der Standard-Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^3$ eine Drehung vom Winkel φ um die z-Achse im $\mathbb{R}^3$ beschreibt.

c) Sei $\vartheta \in [0, \pi)$. Suche jetzt $D_{y,\vartheta} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$, die bezüglich der Standardbasis in $\mathbb{R}^3$ eine Drehung vom Winkel ϑ um die y-Achse im $\mathbb{R}^3$ beschreibt.

d) Wende $D_{z,\varphi} \cdot D_{y,\vartheta}$ auf den Spaltenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ an, um die Punkte der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2$, beschrieben in *geographischen Koordinaten* (Greenwich: $\varphi = 0$) zu erhalten.

(4 Punkte)

Aufgabe 16.3 (Inverse Matrizen)

Invertiere folgende Matrizen durch Berechnung der Determinante und Adjunkte:

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & i & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}. \qquad \text{(4 Punkte)}$$

Aufgabe 16.4 (Berührung in zwei Punkten)

Zeige, dass es zu gegebenen Zahlen $a_1, a_2 \neq a_1, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$ ein eindeutiges Polynom $P(x) \in \mathbb{Q}_3[X]$ gibt, für das gilt:

$$P'(a_1) = \alpha \;, \quad P(a_1) = \beta \;, \quad P'(a_2) = \gamma \;, \quad P(a_2) = \delta \;.$$

Anleitung:

(1) Betrachte die lineare Abbildung
$L : \mathbb{Q}_3[X] \to \mathbb{Q}^4 \;,\; L(P) := (P'(a_1) \;,\; P(a_1) \;,\; P'(a_2) \;,\; P(a_2)) \;.$
Die Vektorräume $\mathbb{Q}_3[X]$ und $\mathbb{Q}^4$ haben dieselbe Dimension. Benutze den Dimensionssatz, um zu zeigen, dass L injektiv ist.

(2) Seien nun e_1, e_2, e_3, e_4 die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{Q}^4$. Die Abbildung L ist sicher dann surjektiv, wenn $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \operatorname{Im} L$. Also finde vier spezielle Polynome $P_i \;\; (i = 1, 2, 3, 4)$, die unter der Abbildung L die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{Q}^4$ liefern: $L(P_i) = e_i$. Finde zunächst P_1. (Hinweis: beachte die Nullstellen: wieviele und wo?) Dann betrachte $Q(X) := (X - a_2)^2$, und merke, dass $L(Q)$ sich als Linearkombination von $e_1 = L(P_1)$ und $e_2 = L(P_2)$ darstellen läßt. So ist P_2 zu bestimmen. Genauso sind P_3, P_4 zu finden. Die Aufgabe ist nun leicht lösbar.

(4 Punkte)

Aufgabe 16.5 (N-te Wurzeln von Eins)

Betrachte die Polynome in $\mathbb{C}_N[Z]$, $P_N(Z) := Z^N - 1 \;,\; Z \in \mathbb{C} \,,\, N \in \mathbb{N}$. Die Nullstellen in $\mathbb{C}$ nennt man die **N-ten Wurzeln von Eins**. Benutze die Polardarstellung der komplexen Zahlen, um diese zu bestimmen. Markiere auf einer Skizze der $\mathbb{C}$-Ebene die 5. und 6. Wurzeln von Eins.

Zeige, dass diese geometrisch durch ein einbeschriebenes (bzw. umschriebenes) reguläres Polygon in (bzw. um) den Einheitskreis gefunden werden können.

(4 Punkte)