Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
SoSe 2008 Blatt 15 (Aufgaben 15.1 - 15.4)

Abgabe vor der Vorlesung am 17.4.2008

Aufgabe 15.1 (Vektoranalysis in $\mathbb{R}^3$)

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Zeige:

i) $\langle w\,,\,(u \times v)\rangle = \langle v\,,\,(w \times u)\rangle = \langle u\,,\,(v \times w)\rangle$

ii) $u \times (v \times w) = \langle u\,,\,w\rangle v - \langle u\,,\,v\rangle w$

iii) $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$

(3 Punkte)

Aufgabe 15.2 (Determinanten)

a) Berechne die folgenden Determinanten:

$$A := \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}\,, \quad B := \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}\,, \quad C := \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}\,,$$

$$D := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix}\,, \quad E := \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}\,, \quad F := \begin{vmatrix} 2 & x & z \\ x & 2 & y \\ z & y & 2 \end{vmatrix}\,.$$

Überlege in jedem Fall, ob eine Berechnung oder ein Argument schneller zum Ergebnis führt als die Anwendung der Entwicklungsformel von Laplace (z. B. durch Überführung in eine Dreiecksmatrix).

b) Zeige:

$$G := \begin{vmatrix} 1-p & 1 & 1 \\ 1 & 1-q & 1 \\ 1 & 1 & 1-r \end{vmatrix} = pqr\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1\right)$$

$$H := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = xyz\,.$$

(8 Punkte)

Aufgabe 15.3 (Normalteiler)

Die symmetrische Gruppe von Ordnung 3 ist gegeben durch die Permutationen
$S_3 := \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$ (s. Aufgabe 3.3).

a) Bestimme alle Untergruppen von S_3.

b) Zeige: $N = \{(1), (123), (132)\} \subset S_3$ ist ein Normalteiler.

   Hinweis. Für Permutationsgruppen gilt: Wenn $h = (a_1 \ldots, a_n)$ und g eine beliebige Permutation ist, dann ist $ghg^{-1} = (g(a_1), \ldots, g(a_n))$, also werden die Ziffern in der Zyklendarstellung von h unter g permutiert. (Nachprufen!)

(5 Punkte)

Aufgabe 15.4 (Wiederholung)

Es seien U, V, W K-Vektorräume, $F : U \to V$ und $L : V \to W$ lineare Abbildungen. Zeige:

a) $L \circ F$ ist linear.

b) F ist injektiv, genau dann wenn $\ker(F) = 0$ gilt.

c) $\ker(F) \subset \ker(L \circ F)$.

d) $\mathrm{Im}(L \circ F) = L(\mathrm{Im}(F))$.

e) Wenn $L \circ F$ injektiv ist, ist F injektiv.

f) Wenn $L \circ F$ surjektiv ist, ist L surjektiv.

Sei nun $W = U$.

g) Wenn $(L \circ F)(u) = u$ für alle $u \in U$ gilt, dann ist F injektiv.

h) Wenn $(F \circ L)(v) = v$ für alle $v \in V$ gilt, dann ist F surjektiv.

(4 Punkte)