Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
WS 2007/08 Blatt 14 (Aufgaben 14.1 - 14.5)

Abgabe vor der Vorlesung am 31.1.2008

Aufgabe 14.1 (Orthonormalisierung)

Sei V der Vektorraum aller Polynomfunktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ vom Grade ≤ 3 mit Skalarprodukt gegeben durch:

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \ .$$

Benutze das Orthonormalisierungsverfahren, um aus der Basis

$$\{f_1 = 1 \quad , \quad f_2 = x \quad , \quad f_3 = x^2 \quad , \quad f_4 = x^3\}$$

eine orthonormale Basis zu bilden.

Definiere den Abstand zwischen zwei Vektoren in V durch

$$d(f,g) := \|f - g\| = \sqrt{\langle f - g\, ,\, f - g\rangle} \ .$$

Zeige:

$$d\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{1}{20}\ ,\ x^3\right) = \frac{1}{20\sqrt{7}} \ .$$

(7 Punkte)

Aufgabe 14.2 (Skalarprodukte)

Für $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ sei $\langle P\, ,\, Q\rangle := 2P(0)Q(0) + P(3)Q(3) + P(4)Q(4)$.

a) Zeige, dass $\langle\cdot\, ,\, \cdot\rangle$ ein Skalarprodukt ist.

b) Wende das Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis $(1, X, X^2)$ an.

c) Gib eine weitere Orthonormalbasis an (ohne viel zu rechnen!).

(4 Punkte)

Aufgabe 14.3 (Skalarprodukt und Norm)

Sei $\langle\cdot\, ,\, \cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V und $\|v\| := \langle v\, ,\, v\rangle$. Zeige, für alle $v, w \in V$ die Parallelogramidentität:

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + \|w\|^2$$

und die Polarisierungsidentität:

$$4\langle v\, ,\, w\rangle = \|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 \ .$$

Ausblick: Gilt die Parallelogramidentität für eine Norm $\|v\|$, so definiert die Polarisierungsformel ein Skalarprodukt.

(2 Punkte)

Aufgabe 14.4 (Dreiecksungleichung)

a) Beweise die verschärfte Dreiecksungleichung

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \ \le \|x \pm y\| \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^n \ .$$

b) Es seien a, b, c, d vier Punkte im $\mathbb{R}^n$. Wir setzen
$l_1 := \|a - b\|$, $l_2 := \|b - c\|$, $l_3 := \|c - d\|$, $l_4 := \|d - a\|$,
außerdem $d_1 := \|a - c\|$, $d_2 := \|b - d\|$. Beweise die Vierecksungleichung:

$$|\ l_1 - l_3\ | \le d_1 + d_2 \ .$$

(Tip: Skizze für $n = 2$; die verschärfte Dreiecksungleichung in a) zweimal anwenden).

(4 Punkte)

Aufgabe 14.5 (Norm)

Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die *Maximumnorm* durch $\|x\|_* := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

a) Zeige, dass $\|x\|_*$ eine Norm ist, d.h. die Axiome einer Norm erfüllt sind.

b) Was ist der *Einheitsball* $\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x\|_* < 1\}$? Skizziere ihn für $n = 2$.

(3 Punkte)