Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
WS 2007/08 Blatt 13 (Aufgaben 13.1 - 13.4)

Abgabe vor der Vorlesung am 24.1.2008

Aufgabe 13.1 (Gauß-Elimination)

Unter Benutzung des Gauß-Eliminationsverfahrens invertiere die Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \ B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4+\alpha & 10 \\ 5 & 6 & 17 \end{pmatrix}.$$

Stelle dir das α aus D als Messfehler vor, und vermeide deshalb, durch α zu dividieren. Für welche α versagt das Verfahren? Berechne den Rang von D für solche α.

(5 Punkte)

Aufgabe 13.2 (Komplexe Zahlen II)

In Aufgabe 5.5 wurde aus $\mathbb{Q}^2$ ein Körper gemacht. Wenn wir genau dasselbe mit $\mathbb{R}^2$ machen, bekommen wir einen anderen Körper, nämlich die ***Komplexen Zahlen***, bezeichnet mit $\mathbb{C}$. Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$, dann definieren wir die zu z ***komplex konjugierte*** Zahl durch $\bar{z} := a - bi$ und die ***Norm*** von z durch $|z| := \sqrt{\bar{z}z}$.

a) Zeige, dass die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ $\mathbb{R}$–linear ist.

b) Zeige, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt: $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$. Folgere, dass $|zw| = |z|\ |w|$.

c) Zeige, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt: $\quad |z + w| \leq |z| + |w|$
(Mache eine schöne Zeichnung dazu; Dreiecksungleichung!).

d) Bringe die folgenden als Produkt von Linearfaktoren gegebenen Polynome aus $\mathbb{C}[X]$ auf die Gestalt $a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$

i) $(X - \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})) \cdot (X - \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}))$

ii) $(X - \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})) \cdot (X - \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}))$

iii) $(X + 1) \cdot (X - \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})) \cdot (X - \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}))$

iv) $(X - \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})) \cdot (X - \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})) \cdot (X + 1) \cdot (X - \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})) \cdot (X - \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}))$.

(5 Punkte)

Aufgabe 13.3 (Matrizen)

a) Eine Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n; K)$ wird *obere Dreiecksmatrix* genannt, wenn für alle i, j mit $i > j$ gilt: $a_{ij} = 0$. Zeige: Sind $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n; K)$ obere Dreiecksmatrizen, so ist auch $A \cdot B$ eine obere Dreiecksmatrix.

b) Zeige, dass jede invertierbare obere Dreiecksmatrix durch elementare Zeilenumformungen in $\mathbb{1}_n$ überführt werden kann.

c) Beweise, dass für alle $X \in \mathrm{Mat}(n \times m; K)$ und $Y \in \mathrm{Mat}(m \times l; K)$ gilt:

$$(X \cdot Y)^T = Y^T \cdot X^T.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 13.4 (Basiswechsel)

Betrachte die folgenden Basen des Polynomvektorraums $\mathbb{Q}_3[X]$:

i) $A := \{1,\ X,\ X^2,\ X^3\}$ *ii)* $B := \left\{1\ ,\ 1 + X\ ,\ 1 + X + \frac{1}{2}X^2\ ,\ 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3\right\}$.

Drücke die Basiselemente $v_k = X^{k-1}$, $k = 1, \ldots, 4$, von A als Linearkombinationen von den Basiselementen $w_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(n-1)!} X^{n-1}$, $k = 1, \ldots, 4$, von B aus, d.h. schreibe

$$v_j = \sum_{i=1}^{4} w_i\, t_{ij}\ , \quad t_{ij} \in \mathbb{Q}\,.$$

Die Matrix $T = (t_{ij}) \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{Q})$ ist die Transformationsmatrix des Basiswechsels von A nach B. Umgekehrt liefert

$$w_j = \sum_{i=1}^{4} v_i\, u_{ij}\ , \quad u_{ij} \in \mathbb{Q}$$

die Transformationsmatrix $U = (u_{ij}) \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{Q})$ des Basiswechsels von B nach A.

Finde die Matrizen T und U und zeige: $U = T^{-1}$.

Betrachte die Matrixdarstellungen $M_A(L), M_B(L) \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{Q})$ der Abbildung $L = \mathrm{diff}$ aus Aufgabe 10.3 bezüglich der Basen A bzw. B. Zeige:

$$M_B(L) = T M_A(L) T^{-1}\ ,$$

und somit, dass $M_A(L)$ und $M_B(L)$ ähnlich sind.

(Beachte: die Basen sollen so geordnet sein, dass beide T und U, genauso wie $M_A(L)$ und $M_B(L)$, obere Dreiecksmatrizen sind).

(5 Punkte)