Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
WS 2007/08 Blatt 12 (Aufgaben 12.1 - 12.4)

Abgabe vor der Vorlesung am 17.1.2008

Aufgabe 12.1 (Matrixmultiplikation)

Berechne die Matrixprodukte $A{\cdot}B$ und $B{\cdot}A$ für die Matrizen A und B mit Einträgen aus K, wobei

a) $K = \mathbb{F}_2,\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$

b) $K = \mathbb{C},\ A\ = \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ i & -1 & 0 \end{pmatrix},\ \ B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(2 Punkte)

Aufgabe 12.2 (Darstellende Matrizen)

Betrachte die in Aufgabe 10.3 erhaltene Matrix $M(L)$, die die Differenziationsabbildung bezüglich der Basis $(1,\ X,\ X^2, \ldots, X^k)$ darstellt.

a) Durch Matrixmultiplikation, finde für $k = 4$, die Matrizen: $M(L)^2, M(L)^3, M(L)^4, M(L)^5$. Prüfe nach, dass sie die Verkettungen $L{\circ}L$, $L{\circ}L{\circ}L$, $L{\circ}L{\circ}L{\circ}L$, $L{\circ}L{\circ}L{\circ}L{\circ}L$ darstellen.

Der Rang einer Matrix ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren (oder auch Zeilenvektoren!). Beachte, dass die Dimension der Kerne dieser Abbildungsmatrizen gleich ($k{+}1$ − Rang(M)) ist.

b) Es läßt sich leicht eine Matrixdarstellung $M(L_k) \in \mathrm{Mat}(k{\times}k{+}1,\ \mathbb{Q})$ der Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} L_k := \mathrm{diff}: & \mathbb{Q}_k[X] & \longrightarrow & \mathbb{Q}_{k-1}[X] \\ & P(X) & \longmapsto & P'(X) \end{array}$$

bezüglich der gleichen Basis für $\mathbb{Q}_k[X]$ schreiben. Nun finde bezüglich dieser Basis die darstellende Matrix $M(N_k) \in \mathrm{Mat}(k{+}2{\times}k{+}1,\ \mathbb{Q})$ der linearen Abbildung: "multipliziere mit X":

$$\begin{array}{rrcl} N_k: & \mathbb{Q}_k[X] & \longrightarrow & \mathbb{Q}_{k+1}[X] \\ & P(X) & \longmapsto & X \cdot P(X)\ . \end{array}$$

c) Multipliziere: $M(N_2){\cdot}M(L_3)$ und $M(L_4){\cdot}M(N_3)$. Interpretiere die Gleichung

$$M(L_4){\cdot}M(N_3) - M(N_2){\cdot}M(L_3) = \mathbb{I}_4$$

für die zugehörigen Abbildungsverkettungen.

(5 Punkte)

Aufgabe 12.3 (Binomische Formeln)

Es seien $A, B, \mathbb{I} \in \mathrm{Mat}(n \times n\,,\, K)$, wobei $\mathbb{I}$ die Einheitsmatrix ist.

a) Berechne: $(A+B)^3$, $(\mathbb{I}+B)^3$. (Klammern auflösen und dabei beachten, dass im allgemeinen $AB \neq BA$.)

b) Zeige, dass für alle $k > 0$ und **kommutierende** Matrizen A, B mit $A^0 := \mathbb{I}$ die folgenden Formeln gelten:

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j} \qquad\qquad A^k - B^k = (A-B) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} B^j$$

(Vergleiche Aufgaben 7.2 und 8.3)

c) Berechne C^5 mit Hilfe von b) für $C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(5 Punkte)

Aufgabe 12.4 (Gauß-Algorithmus)

Bestimme die Lösungsmengen folgender linearer Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Algorithmus:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 &= 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 5x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 9 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 &= 9 \\ 6x_1 + 6x_2 + 6x_3 &= 0\ . \end{aligned}$$

(8 Punkte)