Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
WS 2007/08 Blatt 11 (Probeklausur vom 20.12.2007)

---

1) Begründe, ob die Vektoren
a) $\{1, \sqrt{2}\}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ b) $\{1, \sqrt{2}\}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}$
linear abhängig oder linear unabhängig sind.

2) Sei V ein K-Vektorraum, $L \in \mathrm{End}\,(V)$, $v \in V$, $L^i(v) \neq 0$ für $i = 1, \ldots, n$ und $L^{n+1}(v) = 0$, wobei $L^2 := L \circ L$. Zeige: die Vektoren $\{v, L(v), L^2(v), \ldots, L^n(v)\}$ sind linear unabhängig.

3) Auf der Menge der Restklassen modulo 3, $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{[n] = n + 3\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}\}$, können wir eine Addition definieren durch $[m] + [n] = [m + n]$.

Zeige: Mit dieser Addition als Verknünpfung ist $\mathbb{Z}_3$ eine abelsche Gruppe.

4) Zeige durch Induktion in a, dass $a^p \cong a \pmod{p}$ für $a \in \mathbb{N}$. (Tip: Binomische Lehrsatz!)

5) Bestimme den Spann und dessen Dimension in $\mathbb{Q}^4$ der Spaltenvektoren folgender Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

Welche der Mengen von Spaltenvektoren sind eine Basis ihres Spanns?

6) Betrachte $P(X) := X^4 - 7X^3 + 17X^2 - 17X + 6 \in \mathbb{Q}[X]$.

Was ist die Vielfachheit der Nullstelle $X{=}1$? Gib die Linearfaktorzerlegung von $R(X)$ an.

7) Finde die darstellende Matrix der linearen Abbildung: "multipliziere mit x":

$$\begin{array}{rrcl} L: & \mathbb{Q}_k[x] & \longrightarrow & \mathbb{Q}_{k+1}[x] \\ & P(x) & \longmapsto & x \cdot P(x) \ . \end{array}$$

bezüglich der Basis $(1,\ x,\ x^2, \ldots,\ x^k)$ von $\mathbb{Q}_k[x]$.

Stelle die Abbildung $(x^2 + 2x - 1) \mapsto (x^3 + 2x^2 - x)$ als Matrixgleichung dar.

8) Betrachte Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Q})$: $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Bestimme jeweils den Rang der Matrizen A, B, AB und BA.

b) Was ist die Dimension der Lösungsräume der folgenden Gleichungen ($x \in \mathbb{Q}^3$):

$$Ax = 0 \quad , \quad Bx = 0 \quad , \quad ABx = 0 \quad , \quad BAx = 0 \ ?$$

9) Seien U, V K-Vektorräume und $L : V \to W$ eine lineare Abbildungen.

Zeige: L ist injektiv genau dann, wenn $\ker(L) = \{0\}$ gilt.