Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
WS 2007/08 Blatt 10 (Aufgaben 10.1 - 10.7)

Abgabe vor der Vorlesung am 10.1.2007

Aufgabe 10.1 (Lineare Unabhängigkeit und Dimensionsformel)
Sei V ein K-Vektorraum und $u, v \in V$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

a) $\dim(\text{span}(\{u, v\}) = 2$

b) Es gibt eine lineare Abbildung $\varphi : \text{span}(\{u, v\}) \to K^2$ mit $\varphi(u) = (1, 0)$ und $\varphi(v) = (0, 1)$

c) Die Vektoren u, v sind linear unabhängig .

(Hinweis: Zeige a) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a), so entfällt die Notwendigkeit z.B. c) $\Rightarrow$ a) zu beweisen).

(5 Punkte)

Aufgabe 10.2 (Polynome in der Basis $\{\mathbf{1}, (\mathbf{X} - \mathbf{a}), \ldots, (\mathbf{X} - \mathbf{a})^{\mathbf{n}}\}$)
Es sei $a \in \mathbb{Q}$ fest gewählt.

a) Zeige mittels linearer Abbildungen (Differenzieren und Auswerten an der Stelle $X{=}a$), dass $\{1,\ (X-a),\ \ldots,\ (X-a)^n\}$ eine Basis von $\mathbb{Q}_n[X]$ ist, und sich somit jedes Polynom $P(X) \in \mathbb{Q}_n[X]$ als Linearkombination dieser Basisvektoren schreiben läßt. Das heißt, es gibt Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Q}$ mit

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{j=0}^{n} b_j (X-a)^j \ .$$

b) Gib einen expliziten Algorithmus für die Berechnung der Koordinaten b_j bezüglich der Basis $\{(X-a)^j\ , j = 0, \ldots, n\}$ aus dem Koordinaten a_k bezüglich der Basis $\{X^k\ , k = 0, \ldots, n\}$ an.
(Hinweis: Benutze die Binomische Formel für $((X-a)+a)^k$).

(4 Punkte)

Aufgabe 10.3 (Lineare Abbildungen und darstellende Matrizen)
Betrachte den Polynomvektorraum $\mathbb{Q}_k[X]$. Sei

$$\begin{aligned} L := \text{diff} : \quad \mathbb{Q}_k[X] \ &\longrightarrow\ \mathbb{Q}_k[X] \\ P(X) \ &\longmapsto\ P'(X) \end{aligned}$$

die lineare Abbildung: "ableiten".

a) Was sind die Kerne und die Bilduntervektorräume (einfacher: Bilder) von $L,\ L^2{:=}L{\circ}L,\ L^k,\ L^{k+1}$?

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich lineare Abbildungen $L : V \to W$ für beliebige (endlichdimensionale) Vektorräume durch Matrizen beschreiben lassen.

Für $V = W = \mathbb{Q}_k[X]$ finde die darstellenden Matrizen der Differentiationsabbildung $L := \text{diff}$ bezüglich der Basen

$$i) \quad \{1,\ X,\ X^2, \ldots, X^k\} \qquad ii) \quad \left\{1\ ,\ 1+X\ ,\ 1+X+\frac{1}{2}X^2\ ,\ \ldots\ ,\ \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}X^i\right\}.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 10.4 (Lineare Abbildungen und darstellende Matrizen)

Betrachte die Drehung um den Winkel α im mathematisch positiven Sinn (d.h. gegen den Uhrzeigersinn):

$$\begin{aligned} D_\alpha : \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y \\ \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zeige, dass D_α eine lineare Abbildung ist. Was ist die darstellende Matrix von D_α und von $D_\beta \circ D_\alpha$? Zeige unter Zuhilfenahme der trigonometrischen Additionstheoreme, dass $D_\beta \circ D_\alpha = D_{\beta+\alpha}$ gilt.
Damit haben wir eine geometrische Deutung der Additionstheoreme: Eine Drehung um die Summe zweier Winkel ist dasselbe wie die Hintereinanderausführung zweier einzelner Drehungen!

(5 Punkte)

Freiwillige Weihnachtsaufgaben (20 Bonuspunkte)

Aufgabe 10.5 (Matrixmultiplikation)

Sei

$$M_2(\mathbb{R}) := \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

die Menge aller 2-mal-2 Matrizen mit Koeffizienten (Komponenten) in $\mathbb{R}$. Ferner sei Matrixmultiplikation $*$ definiert durch

$$\begin{aligned} *\colon M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) &\to M_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

a) Zeige, dass die Verknüpfung $*$ assoziativ aber nicht kommutativ ist.

b) Zeige, dass die Matrix $\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ das neutrale Element bezüglich der Verknüpfung $*$ ist. Wir nennen eine Matrix $B \in M_2(\mathbb{R})$ die inverse Matrix zu A, falls die Matrix-Gleichungen $A{*}B = B{*}A = \mathrm{Id}$ erfüllt sind. (Wir schreiben dann $B = A^{-1}$).

Zeige, dass die Matrix $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ keine Inverse hat.

c) Sei nun $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ gegeben, so dass $ad - bc \neq 0$. Finde $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, so dass die Matrix-Gleichung $A{*}B = \mathrm{Id}$ erfüllt wird. Zeige, dass dann $B{*}A = \mathrm{Id}$ auch erfüllt ist. $B = A^{-1}$ ist also die inverse Matrix zu A.

Hinweis: Es sind 4 algebraische Gleichungen für die 4 Unbekannten e, f, g, h zu lösen.

d) Definiere die *Determinante* einer Matrix $A \in M_2(\mathbb{R})$ durch

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc \ .$$

Zeige, dass die Spaltenvektoren (oder Zeilenvektoren) von A linear abhängig sind, falls $\det(A) = 0$. Zeige, dass für alle $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ gilt: $\quad \det(A{*}B) = \det(A)\det(B)$.

(7 Punkte)

Aufgabe 10.6 (Multiplikation nicht immer assoziativ)

Zeige, dass die Menge $\mathcal{Q} := \{\pm 1, \pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$ mit Multiplikation $*\colon \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ definiert durch

$$\begin{aligned}
1 * 1 \ &= \ 1 \quad , \quad (-1) * (-1) \ = \ 1 \quad , \quad 1 * (-1) = (-1) * 1 \ = \ (-1) \\
e_i * e_i \ &= \ -1 \quad , \quad 1 * e_i \ = \ e_i * 1 \ = \ e_i \quad , \quad -e_i \ = \ (-1) * e_i \ = \ e_i * (-1) \quad , \quad i = 1, 2, 3 \\
e_1 * e_2 \ &= \ -e_2 * e_1 \ = \ e_3 \quad , \quad e_2 * e_3 = -e_3 * e_2 \ = \ e_1 \quad , \quad e_3 * e_1 = -e_1 * e_3 \ = \ e_2
\end{aligned}$$

eine Gruppe bildet, unter der Annahme, dass Multiplikation mit ± 1 assoziativ ist. (Hinweis: die Multiplikationsregeln sind symmetrisch unter zyklischen Permutationen der Indizes 1,2,3; es gilt nämlich $e_1 * e_2 \ = \ -e_2 * e_1 \ = \ e_3$ und alle zyklische Permutationen von (1,2,3). So muß die Assoziativität von nur wenigen Tripeln (e_i, e_j, e_k) nachgeprüft werden). Bemerkung: die Elemente $\pm e_i$, $i = 1, 2, 3$, sind Quadratwurzeln von -1 und die Gruppe $\mathcal{Q}$ heißt Quaternionengruppe.

Nun zeige, dass die erweiterte Menge $\mathcal{O} := \{\pm 1 \, , \, \pm e_1 \, , \, \pm e_2 \, , \, \pm e_3 \, , \, \pm e_4 \, , \, \pm e_5 \, , \, \pm e_6 \, , \, \pm e_7\}$ mit folgender Multiplikationstabelle *keine* Gruppe bildet:

	1	-1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	-1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
-1	-1	1	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$	$-e_4$	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$
e_1	e_1	$-e_1$	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_2$	$-e_3$	-1	e_1	$-e_6$	$-e_7$	e_4	e_5
e_3	e_3	$-e_3$	e_2	$-e_1$	-1	$-e_7$	e_6	$-e_5$	e_4
e_4	e_4	$-e_4$	$-e_5$	e_6	e_7	-1	e_1	$-e_2$	$-e_3$
e_5	e_5	$-e_5$	e_4	e_7	$-e_6$	$-e_1$	-1	e_3	$-e_2$
e_6	e_6	$-e_6$	e_7	$-e_4$	e_5	e_2	$-e_3$	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_7$	$-e_6$	$-e_5$	$-e_4$	$-e_3$	e_2	e_1	-1

Die Elemente e_i , $i = 1, \ldots, 7$ ($\pm e_i$ sind Quadratwurzeln von -1) erfüllen für alle geordneten Tripeln
$(i, j, k) \in \{(1,2,3), (1,4,5), (1,7,6), (2,6,4), (2,7,5), (3,5,6), (3,7,4)\}$ die Relationen

$$e_i * e_j = -e_j * e_i = e_k \quad \text{und alle zyklische Permutationen von} \quad (i, j, k) \ .$$

Nehme wieder an, dass Multiplikation mit ± 1 assoziativ ist.
Für das Versagen der Assoziativität reicht es zu zeigen, dass es *ein* Tripel gibt, für welches $e_i * (e_j * e_k) \neq (e_i * e_j) * e_k$.

(7 Punkte)

Aufgabe 10.7 (Taylorpolynome)

a) Es sei $a \in \mathbb{Q}$ fest vorgegeben. Ferner seien $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Q}$.
Zeige, dass es *genau ein* Polynom $Q(X) \in \mathbb{Q}_n[X]$ gibt mit

$$Q(a) = c_0 \quad , \quad Q'(a) = c_1 \quad , \ldots , \quad Q^{(n)}(a) = c_n \ .$$

b) Zeige, dass die Tangente $T(X)$ an der Stelle a zu einem Polynom $P(X)$, gegeben duch

$$T(X) := P(a) - (X - a)P(a) \ ,$$

das einzige Polynom vom Grad ≤ 1 ist mit $T(a) = P(a)$, $T(a) = P(a)$.

c) Folgere aus a), dass für jedes Polynom $P(X) \in \mathbb{Q}_n[X]$ und jedes $a \in \mathbb{Q}$ ein eindeutiges Polynom $T_{n,a}(X) \in \mathbb{Q}_n[X]$ gibt mit

$$T_{n,a}(a) = P(a) \ , \quad T'_{n,a}(a) = P'(a) \quad , \ldots , \quad T^{(n)}_{n,a}(a) = P^{(n)}(a) \ .$$

Das Polynom $T_{n,a}(X)$ heißt *Taylorpolynom vom Grad n bei x=a* zu P.
Speziell ist die Tangente das Taylorpolynom $t_{1,a}(X)$ vom Grad 1.

d) Zeige, dass die beiden Polynome $T_{n,a}(X)$ und $P(X)$ (vgl. Aufgabe 10.2) bezüglich der Basis $\{(X - a)^j \ , j = 0, \ldots, n\}$ die gleichen Koeffizienten haben.

(6 Punkte)