Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

WS 2010/11 Blatt 1 (Aufgabe 1.1 - 1.5)
Abgabe in den Übungen: 26./27.10.2010

Aufgaben mit Punkten sind abzugeben; die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben werden in der ersten Woche in den Tutorien bzw. Übungen diskutiert.

Aufgabe 1.1 (Aussagenlogik I) (T)

Aus einem Zoologiebuch:

"Jede ungebrochselte Kalupe ist dorig und jede foberante Kalupe ist dorig. In Quasiland gibt es sowohl dorige wie undorige Kalupen"

Welche der nachstehenden Folgerungen über die Fauna von Quasiland sind zulässig? [Tipp: Formuliere für die zwei Implikationen in der obigen Aussage jeweils die Kontraposition.]

a) Es gibt sowohl gebrochselte wie ungebrochselte Kalupen.

b) Es gibt gebrochselte Kalupen.

c) Alle undorigen Kalupen sind gebrochselt.

d) Einige gebrochselte Kalupen sind unfoberant.

e) Alle gebrochselten Kalupen sind unfoberant.

Aufgabe 1.2 (Aussagenlogik II) (T)

Hier ist eine Aussage über Quorge:

A) Ist ein Quorg glavul, so ropanzt er.

Formuliere:

B) die Negation C) die Umkehrung D) die Kontraposition

Welche Implikationen bestehen zwischen A, B, C und D?

Aufgabe 1.3 (Aussagenlogik III) (T)

Von den folgenden Aussagen ist genau eine richtig:

a) Fritz hat mehr als tausend Bücher. b) Fritz hat weniger als tausend Bücher.

c) Fritz hat mindestens ein Buch.

Wieviele Bücher hat Fritz?

Aufgabe 1.4 (Gauß-Elimination I) (T)

a) Löse mit dem Eliminationsverfahren das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 10x + 9y &= 11 \end{aligned}$$

i) erst nach y und dann nach x, ii) erst nach x dann nach y.

Prüfe nach, dass x-mal $\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ plus y-mal $\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$ ergibt.

Welche neue Lösung erhalten wir, wenn die rechte Seite durch den Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 44 \end{pmatrix}$ ausgetauscht wird?

Skizziere in beiden Fällen die Geraden, die durch diese Gleichungen beschrieben werden.

b) Für welche zwei Zahlen k liefert das Eliminationsverfahren nicht genau eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} kx + 3y &= 6 \\ 3x + ky &= -6 \ ? \end{aligned}$$

Gibt es jeweils keine oder unendlich viele Lösungen?

Aufgabe 1.5 (Gauß-Elimination II) (20 Punkte)

a) Löse mit dem Eliminationsverfahren:

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 6 \\ -x + 5y &= 0 \ . \end{aligned}$$

Welche Lösung ergibt sich für die rechte Seite $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$?

Skizziere die Geraden, die durch diese Gleichungen beschrieben werden.

b) Zeichne die Geraden zu den Gleichungen $x + y = 5$ und $x + 2y = 6$, und zu der Gleichung $y = \ldots$, die man durch Elimination erhält. Finde c, so dass die Gerade zu $5x - 4y = c$ durch die Lösung dieser Gleichungen geht.

c) Diskutiere, für welche Werte von a das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 4x + 6y &= 0 \\ -2x + ay &= 0 \end{aligned}$$

genau eine oder unendlich viele Lösungen hat. Welches ist die *eine* Lösung, und welche Menge wird im Fall unendlich vieler Lösungen dargestellt? Gibt es noch andere Fälle? - Erläutere das Resultat durch Betrachtung der Geraden, die durch die beiden Gleichungen dargestellt werden.

d) Diskutiere dieselbe Frage wie in c), wobei jetzt aber auf der rechten Seite statt 0 und 0 die Eintragungen 10 und 4 stehen sollen. Wieviele Lösungen gibt es maximal? Kann der Fall eintreten, in dem keine Lösung existiert? Gib auch hier eine geometrische Deutung der Resultate.

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

WS 2010/11 Blatt 2 (Aufgabe 2.1 - 2.5)
Abgabe in den Übungen: 2./3.11.2010

Aufgaben mit Punkten sind abzugeben; die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben werden in der zweiten Woche in den Tutorien bzw. Übungen diskutiert.

Aufgabe 2.1 (Mengen) (T)

Welche der folgenden Aussagen ist wahr, welche falsch? (Begründung)

a) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$.

b) Für alle Mengen A gilt: $\emptyset \in A$.

c) Für alle Mengen A gilt: $\emptyset \subset A$.

d) Für alle Mengen A, B, C gilt: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

e) Für alle Mengen A, B gilt: $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$.

f) Es gibt Mengen A, B, für die gilt: $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$.

Aufgabe 2.2 (Gauß-Elimination I) (T)

Löse das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Eliminationsverfahrens

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 2 \\ x + 4y + 9z &= 6\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.3 (Gauß-Elimination II) (12 Punkte)

Bestimme die Lösungsmengen folgender linearer Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Algorithmus:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 &= 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 5x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 9 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 &= 9 \\ 6x_1 + 6x_2 + 6x_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.4 (Das m × n - Problem I) (T)

a) Zeige wie das lineare Gleichungssystem $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = y_i\ ,\ 1 \leq i \leq m\,$, mit $m, n \geq 2\,$, auf folgendes reduziert werden kann: $\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, x_j = z_i\ ,\ 2 \leq i \leq m\,.$
Argumentiere, dass bei Wiederholung dieses Verfahrens, eins von zwei Zielen erreicht wird:
i) falls $m \geq n$: ein System von $m{-}n{+}1$ Gleichungen in einer Unbekannten,
ii) falls $n > m$: eine Gleichung in $n{-}m{+}1$ Unbekannten.

b) Zeige, dass das Gleichungssystem $a_i\, x = y_i\ ,\ 1 \leq i \leq r\ ,\ r \geq 1$, genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen hat.
Erkläre, wann jeder dieser Fälle eintrtt.

c) Zeige, dass die Gleichung $\sum_{j=1}^{s} a_j\, x_j = b\ ,\ s \geq 2\,$, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen hat.

Aufgabe 2.5 (Das m × n - Problem II) (8 Punkte)

a) Betrachte das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ ax + by &= 4 \\ cx + dy &= 8\,. \end{aligned}$$

Finde für a, b, c und d die Werte $\neq 0$, so dass das System:
i) keine Lösung , ii) genau eine Lösung , iii) unendlich viele Lösungen hat.
Begründe jeden dieser Fälle.

b) Betrachte das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x + y + az &= 4\,. \end{aligned}$$

Für welchen Wert von a hat das System keine Lösung? Für welchen Wert von a hat das System unendlich viele Lösungen?

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

WS 2010/11 Blatt 3 (Aufgabe 3.1 - 3.4)
Abgabe in den Übungen: 9./10.11.2010

Aufgaben mit Punkten sind abzugeben; die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben dienen dem Selbststudium und können in den Tutorien diskutiert werden.

Aufgabe 3.1 (Lineare Gleichungssysteme) (8 Punkte)

a) Die Menge S umfasst alle Tripel reeller Zahlen (x, y, z), welche die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} x + y - z &= b^2, \\ x + ay + z &= b\ , \\ x + a^2 y - z &= b^3. \end{aligned}$$

Bestimme gegebenenfalls die Werte von a und b, für welche die Menge S (i) leer ist, (ii) genau ein Element enthält, (iii) endlich ist, aber mehr als ein Element enthält, (iv) unendlich ist.

b) Wir arbeiten in $\mathbb{R}$. Angenommen, dass $a, b, c \in \mathbb{R}$ nicht alle gleich sind, zeige, dass das System

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0, \\ cx + ay + bz &= 0, \\ bx + cy + az &= 0. \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung hat, genau dann wenn $a + b + c \neq 0$.
Zeige: falls $a + b + c = 0$ erfüllt jede Lösung $x = y = z = 0$.

Aufgabe 3.2 (Geraden) (6 Punkte)

Geraden können auch als eine Menge von Punkten beschrieben werden. Ein beliebiger Punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ und ein beliebiger Richtungsvektor $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ liefern eine Gerade.

$$G_{\mathbf{p},\mathbf{q}} = \{\mathbf{p} + \lambda\mathbf{q} \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

Kurz schreiben wir: $G_{\mathbf{p},\mathbf{q}} := \mathbf{p} + \langle\mathbf{q}\rangle$, wobei $\langle\mathbf{q}\rangle := \{\lambda\mathbf{q} \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller skalaren Vielfachen von $\mathbf{q}$ ist; also die Gerade, die den Vektor $\mathbf{q}$ enthält.

a) Sei $\mathbf{q}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q}, \mathbf{s} \neq \mathbf{0}$. Zeige:

i) ist $\langle\mathbf{q}\rangle = \langle\mathbf{s}\rangle$, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{s} = \lambda\mathbf{q}$,
ii) ist $\langle\mathbf{q}\rangle \neq \langle\mathbf{s}\rangle$, so ist $\langle\mathbf{q}\rangle \cap \langle\mathbf{s}\rangle = \{\mathbf{0}\}$; dann gibt es kein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{s} = \lambda\mathbf{q}$.
Deute diese Aussagen geometrisch.

b) Seien $G_{\mathbf{p},\mathbf{q}} = \mathbf{p} + \langle\mathbf{q}\rangle$, $G_{\mathbf{r},\mathbf{s}} = \mathbf{r} + \langle\mathbf{s}\rangle$ zwei Geraden.
Zeige: $G_{\mathbf{p},\mathbf{q}} = G_{\mathbf{r},\mathbf{s}} \Longleftrightarrow \mathbf{r} \in G_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$ und $\mathbf{s} = \lambda\mathbf{q}$ mit einem passenden $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3.3 (Linear abhängig, linear unabhängig) (6 Punkte)

a) Betrachte die Polynome $P_1(X) := X - 1$, $P_2(X) := X - 2$, $P_3(X) := X - 3$. Zeige, dass je zwei von diesen linear unabhängig, aber alle drei linear abhängig sind. (Koeffzienten in $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$)

b) Überprüfe folgende Systeme von Vektoren aus $\mathbb{Q}^3$ auf lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit:

i) $(1, 0, -1)$, $(1, 2, 1)$, $(0, -3, 2)$
ii) $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$
iii) $(9, 1, 5)$, $(17, 11, 14)$, $(18, 2, 10)$
iv) $(1, 9, 7)$, $(2, 3, 4)$, $(9, 7, 6)$, (6,6,6) .

Aufgabe 3.4 (Matrixmultiplikation) (T)

Sei

$$\mathbb{R}^{2\times2} := \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ : \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

die Menge aller 2-mal-2 Matrizen mit Koeffizienten (Komponenten) in $\mathbb{R}$. Ferner sei die Matrixmultiplikation $*$ definiert durch

$$\begin{aligned} *\colon \mathbb{R}^{2\times2} \times \mathbb{R}^{2\times2} \quad &\to \quad \mathbb{R}^{2\times2} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \quad &= \quad \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

a) Zeige, dass die Verknüpfung $*$ assoziativ aber nicht kommutativ ist.

b) Zeige, dass die Matrix $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für beliebige $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ die Gleichungen

$I{*}A = A{*}I = A$ erfüllt. (I ist das neutrale Element bezüglich der Verknüpfung $*$.)

Wir nennen eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times2}$ die inverse Matrix zu A, falls die Matrix-Gleichungen $A{*}B = B{*}A = I$ erfüllt sind. (Wir schreiben dann $B = A^{-1}$).

Zeige, dass die Matrix $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ keine Inverse hat.

c) Sei nun $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2}$ gegeben, so dass $ad - bc \neq 0$.Finde $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, damit die Matrix-Gleichung $A{*}B = I$ erfüllt wird. Zeige, dass dann $B{*}A = I$ auch erfüllt ist. $B = A^{-1}$ ist also die inverse Matrix zu A. [*Hinweis: Es sind 4 algebraische Gleichungen für die 4 Unbekannten e, f, g, h zu lösen.*]

d) Definiere die *Determinante* einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ durch

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc .$$

Zeige, dass die Spaltenvektoren (oder Zeilenvektoren) von A linear abhängig sind, genau dann, wenn $\det(A) = 0$.
Zeige, dass für alle $A, B \in \mathbb{R}^{2\times2}$ gilt: $\det(A{*}B) = \det(A)\det(B)$.

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

WS 2010/11 Blatt 4 (Aufgabe 4.1 - 4.7)
Abgabe in den Übungen: 16./17.11.2010

Aufgaben mit Punkten sind abzugeben; die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben dienen dem Selbststudium und können in den Tutorien diskutiert werden.

Aufgabe 4.1 (Linear abhängig, linear unabhängig) (4 Punkte)

Begründe, welche der nachfolgenden Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind und welche $\mathbb{R}^3$ erzeugen (d.h. aufspannen).

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}$.

Aufgabe 4.2 (Spann und linear unabhängige Vektoren) (3 Punkte)

Es seien $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängige Vektoren in einem K-Vektorraum V und die Vektoren $w_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} v_k \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$ ($a_{jk} \in K;\ j = 1, ..., n$) seien ebenfalls linear unabhängig.

a) Sei $u \in V \setminus \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_k)$. Zeige, dass $v_1, \ldots, v_k, u$ auch linear unabhängig sind.

b) Zeige, dass es ein i gibt mit $a_{i1} \neq 0$. Nach Umbenennung darf $a_{11} \neq 0$ angenommen werden. Berechne v_1 in Abhängigkeit von $w_1, v_2, \ldots, v_n$.

c) Zeige, dass die Vektoren $a_{11}w_2 - a_{21}w_1,\ a_{11}w_3 - a_{31}w_1, \ldots, a_{11}w_n - a_{n1}w_1$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 4.3 (Linear abhängig, linear unabhängig) (3 Punkte)

Überprüfe für die folgenden K-Vektorräume V, ob $M \subset V$ linear unabhängig ist:

a) $K = \mathbb{R}\,, V = \mathbb{R}^3\,, \quad M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$

b) $K = \mathbb{Q}\,, V = \mathbb{R}\,, \quad M = \{1, \sqrt{2}\}$

c) $K = \mathbb{R}\,,\ V = \mathbb{R}_2[X]\,, \quad M = \{1 + X^2\ ,\ 1 - X^2\ ,\ X\}$.

Aufgabe 4.4 (K-Vektorräume) (T)

a) Betrachte die Indexmenge $M = \{1, \dots, n\}$ und die Rationalen $\mathbb{Q}$. Zeige, dass die Produktmenge

$$V = \mathbb{Q}^n = \left\{ \begin{array}{ccc} v : M & \to & \mathbb{Q} \\ i & \mapsto & \pi_i(v) := v_i \end{array} \right\}$$

mit einer Addition und einer skalaren Multiplikation ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist.

b) Zeige, dass die Menge $\mathbb{Q}_2[X]$ aller Polynome vom Grad ≤ 2 ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist.

Aufgabe 4.5 (Lineare Abbildungen) (3 Punkte)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear (warum oder warum nicht)?

a) $F_1 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\,, \qquad x \mapsto 3x$

b) $F_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\,, \qquad x \mapsto 3x + 2$

c) $F_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\,, \qquad x \mapsto x^2$

d) $F_4 : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]\,, \qquad P(X) \mapsto P(X) + X^2 + 3X$

e) $F_5 : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]\,, \qquad P(X) \mapsto (3X + 2)P(X)$

f) $F_6 : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]\,, \qquad P(X) \mapsto P(X + 1)$

Aufgabe 4.6 (Geraden) (7 Punkte)

Zeige für $\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{v}', \mathbf{u}' \in \mathbb{R}^2$:

a) Falls $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, dann gilt entweder
$\{\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w} \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\} \cap \{\mathbf{v}' + \lambda\mathbf{w} \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\} = \emptyset$
oder
$\{\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w} \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{v}' + \lambda\mathbf{w} \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

b) Falls $\mathbf{u} \neq \mathbf{u}'$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$ und es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ungleich null gibt, so dass $\lambda(\mathbf{u} - \mathbf{u}') = \mu(\mathbf{v} - \mathbf{v}')$, dann gilt, dass die Geraden, die $\mathbf{u}$ mit $\mathbf{u}'$ und $\mathbf{v}$ mit $\mathbf{v}'$ verbinden, sich entweder nicht treffen oder identisch sind.

c) Wenn $\mathbf{u}\,, \mathbf{v}\,, \mathbf{w}$ die Gleichung: $\mu\mathbf{u} + \nu\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w} = 0$ mit $\mu\,, \nu\,, \lambda \in \mathbb{R}$, alle ungleich null und $\mu + \nu + \lambda = 0$, erfüllen, dann liegen $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ alle auf der gleichen Geraden.

Aufgabe 4.7 (Schnittpunkte von Geraden) (T)

Berechne alle Schnittpunkte der Geraden $G_{a,v}$ und $G_{b,w}$, wobei:

a) $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

b) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix},$

c) $a = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \end{pmatrix}.$

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

WS 2010/11 Blatt 5 (Aufgabe 5.1 - 5.7)
Abgabe in den Übungen: 23./24.11.2010

Aufgaben mit Punkten sind abzugeben; die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben dienen dem Selbststudium und können in den Tutorien diskutiert werden.

Aufgabe 5.1 (Linear unabhängig) (T)

Die folgenden quadratischen Polynome aus $\mathbb{Q}_2[X]$ sind linear unabhängig:

$$P_1(X) = \frac{(X-2)(X-3)}{(1-2)(1-3)}\ , \quad P_2(X) = \frac{(X-1)(X-3)}{(2-1)(2-3)}\ , \quad P_3(X) = \frac{(X-1)(X-2)}{(3-1)(3-2)}\ .$$

Also ist die Gleichung $a_1P_1(X) + a_2P_2(X) + a_3P_3(X) = 0$ für $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}$ nur durch $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ erfüllt. Diese Aussage kann durch die Betrachtung eines linearen Gleichungssystems für die Unbekannten a_1, a_2, a_3 bewiesen werden. Stelle dieses Gleichungssystem auf. Warum brauchen wir dieses Gleichungssystem nicht zu lösen, um die Aussage über die lineare Unabhängigkeit zu beweisen? Wiederhole die Argumentation aus der Vorlesung schriftlich.

Aufgabe 5.2 (Lagrange Interpolation) (5 Punkte)

Sind die folgenden kubischen Polynome aus $\mathbb{Q}_3[X]$ linear abhängig?

$$P_1(X) = \frac{(X-2)(X-3)(X-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}\ , \quad P_2(X) = \frac{(X-1)(X-3)(X-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$

$$P_3(X) = \frac{(X-1)(X-2)(X-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}\ , \quad P_4(X) = \frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}\ .$$

(Beantwortung mittels eines Gleichungssystems gilt als Notlösung.)

Finde als Linearkombination $Q(X) = \sum_{i=1}^{4} a_i P_i(X)$ das kubische Polynom, das an den vier Stellen $X = 1, 2, 3, 4$ den Wert $\frac{315}{19}$ hat.

Aufgabe 5.3 (Lineare Abbildungen) (5 Punkte)

Es sei $\mathbb{Q}_3[X]$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$.

a) Zeige, dass es keine lineare Abbildung $F : \mathbb{Q}_3[X] \to \mathbb{Q}_3[X]\ ,\ P \mapsto Q{:=}F(P)$ gibt, so dass $F(1) = X\ ,\quad F(X) = 1 \quad$ und $\quad F(1+X) = X^2\ .$

b) Zeige, dass es auch keine lineare Abbildung $G : \mathbb{Q}_3[X] \to \mathbb{Q}_3[X]$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} G(X^3 + 2X^2 + 5X + 1) &= X^2 + 3X \\ G(2X^3 + 5X^2 + 7X + 2) &= X^3 \\ G(X^2 - 3X) &= X^3 - 2X^2\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 5.4 (Untervektorraum) (T)

Zu $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$U_\alpha := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = \alpha \right\} .$$

Zeige, dass U_α genau dann ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist, wenn $\alpha = 0$.

Aufgabe 5.5 (Untervektorräume) (4 Punkte)

Begründe, welche der folgenden Teilmengen Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ sind:

a) Geraden, die die 0 enthalten,

b) Geraden, die die 0 nicht enthalten,

c) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x_1)^2 = (x_2)^2 \right\}$,

d) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 = (x_2)^2 \right\}$.

Aufgabe 5.6 (Rang und Kern von Matrizen) (6 Punkte)

Betrachte:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Bestimme jeweils den Rang der Matrizen A, B, AB und BA.

b) Was ist die Dimension der Lösungsräume der folgenden Gleichungen ($x \in \mathbb{Q}^3$):

$$Ax = 0 \quad , \quad Bx = 0 \quad , \quad ABx = 0 \quad , \quad BAx = 0 \;?$$

Aufgabe 5.7 (Kern und Bild einer Matrix) (T)

Finde die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, definiert durch

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} , \quad A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Warum ist $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto w := A \cdot v$ eine lineare Abbildung?

Sind die Teilmengen

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad N := \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

linear abbhängig oder linear unabhängig? Was sind $\operatorname{span}_{\mathbb{R}} M$ und $\operatorname{span}_{\mathbb{R}} N$?

Was ist der Rang von A? Bestimme das Bild und (wenn $\neq \{0\}$) den Kern von A. Finde gegebenenfalls einen Vektor im $\ker(A)$.

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

WS 2010/11 Blatt 6 (Aufgabe 6.1 - 6.7)
Abgabe in den Übungen: 30.11./1.12.2010

Aufgaben mit Punkten sind abzugeben; die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben dienen dem Selbststudium und können in den Tutorien diskutiert werden.

Aufgabe 6.1 (Kern und Bild) (6 Punkte)

Betrachte folgende lineare Abbildungen:

$$A: \begin{array}{rcl} \mathbb{Q}_3[X] & \to & \mathbb{Q}_2[X]\,, \\ P(X) & \mapsto & P'(X) \end{array} \qquad B: \begin{array}{rcl} \mathbb{Q}_2[X] & \to & \mathbb{Q}_3[X] \\ Q(X) & \mapsto & (X-1)Q(X)\,. \end{array}$$

Hier bezeichnet $P'(X)$ die lineare Abbildung: „differenziere $P(X)$ bezüglich der Unbestimmten X".

a) Was sind der Kern und der Bilduntervektoraum (einfacher: Bild) von A?

b) Bestimme den Kern (wo?) und das Bild (auch wo?) von der Komposition $A \circ B$.

c) Bestimme den Kern und das Bild von $B \circ A$.

d) Bestimme $V = \{P \in \mathbb{Q}_3[X] \mid (B \circ A)(P) = P\}$ und zeige, dass V ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}_3[X]$ ist.

Aufgabe 6.2 (Geometrische Vektoren) (4 Punkte)

Betrachte ein Tetraeder mit den Ecken $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^3$.
Sei der Schwerpunkt des Dreiecks mit den Ecken $\mathbf{v}_i$, $i \neq j$, gegeben durch $\mathbf{w}_j := \frac{1}{3} \sum_{i \neq j} \mathbf{v}_i$.

Zeige: Die 4 Geraden $L_{\mathbf{v}_j \mathbf{w}_j} := \{\lambda_j \mathbf{v}_j + (1-\lambda_j)\mathbf{w}_j \mid \lambda_j \in \mathbb{R}\}$, $1 \leq j \leq 4$, die $\mathbf{v}_j$ und $\mathbf{w}_j$ verbinden, treffen sich am Schwerpunkt des Tetraeders.

Aufgabe 6.3 (Norm und Skalarprodukt) (T)

Sei $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

a) Zeige, dass die Norm $\|\mathbf{x}\| := \big(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\big)^{1/2}$ folgende Eigenschaften hat:

$$i) \quad \|\mathbf{x}\| \geq 0\,, \qquad ii) \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}\,, \qquad iii) \quad \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\|\,.$$

b) Zeige, dass das Skalarprodukt $\langle\, \mathbf{x}\,,\, \mathbf{y}\,\rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ folgende Eigenschaften hat:

$$\begin{array}{llll} i) & \langle\, \mathbf{x}\,,\, \mathbf{x}\,\rangle \geq 0 & ii) & \langle\, \mathbf{x}\,,\, \mathbf{x}\,\rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ iii) & \langle\, \mathbf{x}\,,\, \mathbf{y}\,\rangle = \langle\, \mathbf{y}\,,\, \mathbf{x}\,\rangle & iv) & \langle\, \mathbf{x}\,,\, (\mathbf{y}+\mathbf{w})\,\rangle = \langle\, \mathbf{x}\,,\, \mathbf{y}\,\rangle + \langle\, \mathbf{x}\,,\, \mathbf{w}\,\rangle \\ v) & \langle\, \lambda\mathbf{x}\,,\, \mathbf{y}\,\rangle = \lambda \langle\, \mathbf{x}\,,\, \mathbf{y}\,\rangle & vi) & \langle\, \mathbf{x}\,,\, \mathbf{x}\,\rangle = \|\mathbf{x}\|^2\,. \end{array}$$

Aufgabe 6.4 (Mittelpunkt) (T)

Sei $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$. Zeige, dass es einen eindeutigen Punkt $\mathbf{x}$ auf der Geraden, die $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ verbindet, gibt, so dass: $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ und dass $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

Aufgabe 6.5 (Dreiecksungleichung und Skalarprodukt) (6 Punkte)

Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

a) Zeige: $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| + \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\| \geq \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|$
Wann gilt die Gleichheit?
Folgere eine Ungleichung für die Kanten eines Dreiecks.

b) Zeige: $\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|^2$.
Wähle $n = 2$ und zeige, dass $\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{c}\| \cos\theta$, wobei θ der Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{c}$ ist.

c) Beweise die verschärfte Dreiecksungleichung $\big| \|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}\| \big| \leq \|\mathbf{a} \pm \mathbf{b}\|$.

d) Es seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ vier Punkte im $\mathbb{R}^n$. Wir setzen
$l_1 := \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$, $l_2 := \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|$, $l_3 := \|\mathbf{c} - \mathbf{d}\|$, $l_4 := \|\mathbf{d} - \mathbf{a}\|$,
außerdem $d_1 := \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|$, $d_2 := \|\mathbf{b} - \mathbf{d}\|$. Beweise die Vierecksungleichung:

$$| \, l_1 - l_3 \, | \leq d_1 + d_2 \, .$$

(Tipp: Skizze für $n = 2$; die verschärfte Dreiecksungleichung in a) zweimal anwenden)

Aufgabe 6.6 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) (4 Punkte)

Zeige unter Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung in $\mathbb{R}^3$, dass für alle rellen Zahlen x, y, z gilt:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq yz + zx + xy \, .$$

Wann gilt die Gleichheit: $x^2 + y^2 + z^2 = yz + zx + xy$?

Aufgabe 6.7 (Pythagoras) (T)

Zeige:

a) Falls $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ folgt $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
Warum entspricht dies dem Satz von Pythagoras?

b) Falls $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ paarweise senkrechte Vektoren sind, dann gilt:
$\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2$.

c) Formuliere und beweise das entsprechende Ergebnis in $\mathbb{R}^4$.

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

WS 2010/11 Blatt 7 (Aufgabe 7.1 - 7.7)
Abgabe in den Übungen: 7./8.12.2010

Aufgaben mit Punkten sind abzugeben; die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben dienen dem Selbststudium und können in den Tutorien diskutiert werden.

Aufgabe 7.1 (Orthogonale Vektoren) (T)

Wir arbeiten in $\mathbb{R}^3$. Sind die folgenden Aussagen immer wahr oder manchmal falsch? Gib für jeden Fall einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) Aus $\mathbf{u}' \perp \mathbf{v}$ folgt $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$.
b) Aus $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ und $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ folgt $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$.
c) Aus $\mathbf{u} \perp \mathbf{u}$ folgt $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Aufgabe 7.2 (Parallelogrammgleichung) (4 Punkte)

Zeige: $\quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad \Longrightarrow \quad \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2)$.

Interpretiere für $n = 2$ die Gleichung bezüglich der Längen der Seiten und Diagonalen des Parallelogramms.

Aufgabe 7.3 (Rechnen mit Vektoren) (6 Punkte)

Beweise folgende Aussagen nur mit Hilfe der linearen Algebra (ohne Trigonometrie).
[Tipp: Betrachte am besten nur Abstände.]

a) Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks treffen sich in einem Punkt. Dieser Punkt ist Mittelpunkt des Kreises, der das Dreieck umschreibt.

b) Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks treffen sich in einem Punkt. Dieser Punkt ist Mittelpunkt des einschreibenden Kreises des Dreiecks (also des Kreises, der tangential zu allen drei Kanten liegt).

Aufgabe 7.4 (Geraden) (5 Punkte)

Wir arbeiten in $\mathbb{R}^2$.

a) Zeige, dass es zum Einheitsvektor $\mathbf{u} = (v, w)$ genau zwei orthogonale Einheitsvektoren $\mathbf{n}$ und $\mathbf{n}'$ gibt. Welche?

b) Gegeben sei eine Gerade $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{c}$, $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, $t \in \mathbb{R}$. Finde einen Einheitsvektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$ und $p \in \mathbb{R}$, so dass die Gerade durch $\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle = p$ beschrieben wird.

c) Gegeben sei eine Gerade $\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle = p$, wobei $\mathbf{n}$ ein Einheitsvektor ist.
Finde $\mathbf{a}$ und $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, so dass die Gerade durch $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{c}$, $t \in \mathbb{R}$, beschrieben wird.

Aufgabe 7.5 (Ebenen) (T)

Wir arbeiten in $\mathbb{R}^3$.

Seien $\mathbf{n}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{n}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{n}_3 = (2^{-1/2}, 2^{-1/2}, 0)$, $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = 2^{1/2}$ und drei Ebenen π_j durch die Gleichungen $\langle \mathbf{n}_j , \mathbf{x} \rangle = p_j$ gegeben.

Zeige, dass sich die Ebenen paarweise in einer Geraden treffen, aber dass kein Punkt zu allen drei Ebenen gehört.

Gib jeweils ein einfaches Beispiel für Ebenen π_j, die die folgenden Bedingungen erfüllen.

a) Keine zwei Ebenen treffen einander.

b) Die Ebenen π_1 und π_2 treffen sich in einer Geraden und die Ebenen π_1 und π_3 treffen sich in einer Geraden, aber π_2 und π_3 treffen sich nicht.

Aufgabe 7.6 (Sphäre) (5 Punkte)

Wir arbeiten in $\mathbb{R}^3$. Wir legen $c \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ fest, mit $c < \langle \mathbf{a} , \mathbf{a} \rangle$.

Zeige: Wenn $\mathbf{x} + \mathbf{y} = 2\mathbf{a}$, $\langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle = c$, dann liegt $\mathbf{x}$ auf einer Sphäre.

Finde explizit das Zentrum und den Radius dieser Sphäre.

Aufgabe 7.7 (Inversion) (T)

Wir arbeiten in $\mathbb{R}^2$. Betrachte die Abbildung:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\} &\to \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\} \\ \mathbf{x} &\mapsto f(\mathbf{x}) := \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2}\, \mathbf{x} \,. \end{aligned}$$

a) Zeige, dass $f \circ f(\mathbf{x}) = f(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$.

b) Sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$, und $\|\mathbf{a}\| \neq r$.

   Zeige, dass f den Kreis mit Radius r und Mittelpunkt $\mathbf{a}$ auf einen anderen Kreis abbildet. Bestimme den Radius und Mittelpunkt des neuen Kreises.

c) Sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$, und $\|\mathbf{a}\| = r$.

   Zeige, dass f den Kreis mit Radius r und Mittelpunkt $\mathbf{a}$ (ausgenommen Punkt $\mathbf{0}$) auf einer Geraden abbildet. Bestimme diese Gerade.

Wir nennen die Abbildung f eine Inversion.

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

WS 2010/11 Blatt 8 (Aufgabe 8.1 - 8.4)
Abgabe in den Übungen: 14./15.12.2010

Aufgaben mit Punkten sind abzugeben; die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben dienen dem Selbststudium und können in den Tutorien diskutiert werden.

Aufgabe 8.1 (Matrizenkalkül I) (T)

a) Zeige, dass die Menge $\mathbb{R}^{n\times n}$ von reellen $n \times n$ Matrizen einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.

b) Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wird *obere Dreiecksmatrix* genannt, wenn für alle i, j mit $i > j$ gilt: $a_{ij} = 0$. Zeige: Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obere Dreiecksmatrizen, so ist auch das Produkt AB eine obere Dreiecksmatrix.

c) Berechne folgende Matrixprodukte:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Unter Benutzung des Gauß-Eliminationsverfahrens invertiere die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8.2 (Matrizenkalkül II) (7 Punkte)

a) Zeige, dass jede invertierbare obere Dreiecksmatrix aus $\mathbb{R}^{n\times n}$ durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix I überführt werden kann.

b) Beweise, dass für alle $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $Y \in \mathbb{R}^{m\times l}$ für die Transponierten gilt:

$$(XY)^T = Y^T X^T.$$

c) Berechne die Potenzen A^n , $n = 1, \ldots, 5$, für:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Berechne folgende Matrixprodukte:

i)

$$\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ii)

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

iii)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} e_i \qquad \text{für} \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

iv)

$$e_i^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ wobei } e_i^T \text{ die Transponierten der Einheitsvektoren } e_i \text{ sind.}$$

Aufgabe 8.3 (Inversion von Matrizen) (9 Punkte)

Unter Benutzung des Gauß-Eliminationsverfahrens invertiere die Matrizen:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4+\alpha & 10 \\ 5 & 6 & 17 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Stelle α in D als Messfehler vor, und vermeide deshalb, durch α zu dividieren. Für welche α versagt das Verfahren? Berechne den Rang von D für solche α.

Nun wiederhole die Rechnung für E, wobei bei jedem Schritt jede Zahl auf drei Dezimalstellen gerundet wird. Also ist das Invertieren einer Matrix für einen Rechner nicht unbedingt einfach.

Aufgabe 8.4 (Abbildungen) (4 Punkte)

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Beweise:

a) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

b) Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

c) Sind f und g bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv.

d) Drücke im bijektiven Fall die Umkehrabbildung von $g \circ f$ durch diejenigen von f und g aus.

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

WS 2010/11 Blatt (Aufgabe 9.1 - 9.7)
Abgabe in den Übungen: 04./05.01.2011

15 Bonuspunkte

Aufgaben mit Punkten sind abzugeben; die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben dienen dem Selbststudium und können in den Tutorien diskutiert werden.

Aufgabe 9.1 (Gruppen) (T)

a) Zeige, dass die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit Addition

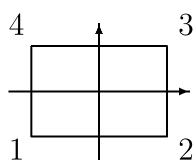
$$\begin{aligned} + : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned}$$

als Verknüpfung eine kommutative Gruppe ist.

b) Zeige, dass $(\mathbb{Q}\,, +)$ und $(\mathbb{R}\,, +)$ ebenfalls kommutative Gruppen bezüglich der Addition sind.

c) Warum ist $(\mathbb{N}\,, +)$ keine Gruppe?

Aufgabe 9.2 (Kleinsche Vierergruppe) (5 Punkte)



Betrachte die Symmetriegruppe eines Rechtecks mit ungleichen Seiten. Wir ordnen den Ecken die Zahlen $\{1, 2, 3, 4\}$ zu. Die Symmetrien, die die Abstände erhalten, sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} e &: (1,2,3,4) \rightarrow (1,2,3,4) && \text{neutrale Abbildung} \\ f &: (1,2,3,4) \rightarrow (4,3,2,1) && \text{Spiegelung an der x-Achse} \\ g &: (1,2,3,4) \rightarrow (2,1,4,3) && \text{Spiegelung an der y-Achse} \\ h &: (1,2,3,4) \rightarrow (3,4,1,2) && \text{Drehung um } 180^\circ X \end{aligned}$$

Zeige: Die Menge der Abbildungen $V_4; = \{e, f, g, h\}$ mit Komposition als Verknüpfung bildet eine kommutative Gruppe, genannt *Kleinsche Vierergruppe*. Schreibe die Gruppentafel (Verknüpfungstabelle) aus.

Aufgabe 9.3 (Symmetrische Gruppe) (5 Punkte)
Betrachte die Permutationen der Menge $M = \{1, 2, 3\}$.
Bestimme die Multiplikationstabelle bezüglich der Komposition der Permutationen.
Zeige, dass die Menge aller Permutationen, zusammen mit der Komposition als Verknüpfung, eine nicht-kommutative Gruppe bildet.
(Diese Gruppe heißt die *symmetrische Gruppe von drei Elementen*, S_3.)

Aufgabe 9.4 (Komposition von Funktionen) (15 Punkte)
Betrachte die Abbildungen

$$\begin{aligned} F_i : \mathbb{Q}\backslash\{0,1\} &\rightarrow \mathbb{Q}\backslash\{0,1\} \\ x &\mapsto F_i(x) \quad , \quad i = 1,2 \end{aligned}$$

definiert durch

$$F_1 := 1 - x \quad , \quad F_2 := \frac{1}{x} \; .$$

Wir bezeichnen die Komposition von Funktionen F, G als $F \circ G : x \mapsto F(G(x))$ und id ist die identische Abbildung.

a) Zeige, dass $F_1 \circ F_1 = F_2 \circ F_2 = \mathrm{id}$.

b) Berechne $G_1 := F_1 \circ F_2$, $G_2 := F_2 \circ F_1$, $F_3 := G_1 \circ F_1$.

Merke, dass $F_1 \circ F_2 \neq F_2 \circ F_1$; d.h. die Komposition nicht kommutativ bzw. *nicht-abelsch* ist.

c) Zeige:

$$F_1 \circ G_1 = F_2 \;, \quad F_1 \circ G_2 = F_3 \;, \quad G_2 \circ F_1 = F_2 \;, \quad F_1 \circ F_3 = G_2 \;, \quad F_3 \circ F_1 = G_1 \,.$$

d) Betrachte die Menge der Abbildungen $M := \{\mathrm{id}, F_1, F_2, F_3, G_1, G_2\}$.
Zeige, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} L_{F_i} : M &\rightarrow M \quad , \quad i = 1,2 \\ H &\mapsto L_{F_i}(H) := F_i \circ H \end{aligned}$$

bijektiv sind.

e) Zeige, dass $F_3 \circ F_3 = \mathrm{id}$ und weiterhin, dass $G_1 \circ G_1 \circ G_1 = G_2 \circ G_2 \circ G_2 = \mathrm{id}$.
Was sind die Umkehrfunktionen G_1^{-1}, G_2^{-1} ?

f) Zeige, dass $(M, \circ)$ eine Gruppe ist. Das inverse Element zu $H \in M$ ist die Umkehrfunktion H^{-1}. Bestimme die Multiplikationstabelle bezüglich der Komposition der Abbildungen. Vergleiche diese Tabelle mit der Multiplikationstabelle der Gruppe S_3 aus Aufgabe 9.3.

Aufgabe 9.5 (Multiplikation quadratischer Matrizen) (T)

Beweise folgende Relationen für $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
1. durch Anwendung der Definitionen von Matrixmultiplikation und -addition,
2. durch direkte Rechnung und
3. durch Rechnung unter Anwendung der Summationskonvention:

$$\begin{array}{llll} \text{i)} & (AB)C = A(BC) & & \\ \text{ii)} & A(B+C) = AB + AC & \text{iii)} & (B+C)A = BA + CA \\ \text{iv)} & (\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB) & \text{v)} & AI = IA = A\,. \end{array}$$

Hier bezeichnet I die Einheitsmatrix.

Aufgabe 9.6 (Matrixgruppe) (5 Punkte)

Zeige: Die Menge der invertierbaren quadratischen Matrizen

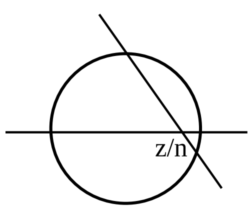
$$M := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A \text{ invertierbar}\}$$

ist bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe mit der Einheitsmatrix I als neutrales Element. Das inverse Element zu $A \in M$ ist die inverse Matrix A^{-1}.

Die Gruppe M heißt die *allgemeine lineare Gruppe* mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$, bezeichnet $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Aufgabe 9.7 (Rationale Kreispunkte) (5 Punkte)

Gegeben seien der Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ und eine Gerade, die den Punkt $(0, 1)$ des Kreises mit dem rationalen Punkt $(z/n, 0)$ der x-Achse verbindet ($z \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$). Berechne den zweiten Schnittpunkt der Geraden mit dem Kreis und zeige, dass seine beiden Koordinaten rational sind.



(Wie liefert jeder rationale Punkt auf dem Einheitskreis (vgl. obige Berechnung) ein pythagoräisches Tripel $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a^2 + b^2 = c^2$?)

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

WS 2010/11   Blatt 10: Probeklausur (Aufgabe 10.1 - 10.2)

Aufgabe 10.1 (Lineare Gleichungsysteme) (15 Punkte)

Seien

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} .$$

a) Prüfe nach, ob A und B invertierbar sind, und gegebenenfalls invertiere.

b) Bestimme die Lösungsmengen in $\mathbb{R}^3$ der linearen Gleichungssysteme

$$A\,x \;:=\; \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$B\,x \;:=\; \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

c) Was sind die Dimensionen der Lösungsräume? Was sind die Ränge von A und B?

d) Finde gegebenenfalls (wenn $\neq \{0\}$) die Kerne von A und B.

Aufgabe 10.2 (Rechnen mit Vektoren) (15 Punkte)

a) Beweise, dass die Diagonalen eines Parallelogramms einander halbieren.

b) Beweise, dass die Gerade, die eine Ecke eines Parallelogramms mit dem Mittelpunkt einer der gegenüberliegenden Seiten verbindet, die Diagonale drittelt und von dieser selbst gedrittelt wird.

c) Betrachte ein Tetraeder mit den Ecken $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^3$.
Sei der Massenmittelpunkt des Dreiecks mit den Ecken $\mathbf{v}_i$, $i \neq j$, gegeben durch

$$\mathbf{w}_j := \frac{1}{\sum_{i\neq j} m_i} \sum_{i\neq j} m_i \mathbf{v}_i \,.$$

Zeige: Die 4 Geraden $L_{\mathbf{v}_j\mathbf{w}_j} := \{\lambda_j \mathbf{v}_j + (1-\lambda_j)\mathbf{w}_j \mid \lambda_j \in \mathbb{R}\}$, $1 \leq j \leq 4$, die $\mathbf{v}_j$ und $\mathbf{w}_j$ verbinden, treffen sich am Massenmittelpunkt des Tetraeders.

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

WS 2010/11 Blatt 11 (Aufgabe 11.1 - 11.3)
Abgabe in den Übungen: 11./12.01.2011

Aufgabe 11.1 (Permutationen) (T)

Zeige, dass die Permutationen $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ nicht kommutativ sind, nämlich

$$S \circ T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = T \circ S$$

Dagegen gilt mit $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ die Formel $(S \circ T) \circ U = S \circ (T \circ U)$.

Zeige, dass jede Permutation $\sigma \in S_n$ als Komposition $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_p$ von Transpositionen (Vertauschungen) τ_i dargestellt werden kann. Bei einer Transposition werden jeweils zwei Zahlen vertauscht und alle anderen durch sich selbst ersetzt.
Was sind die zu S und T inversen Permutationen? Prüfe nach, dass $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.

Aufgabe 11.2 (Flächeninhalt eines Parallelogramms) (T)

Sei $\mathcal{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ der Flächeninhalt eines Parallelogramms mit den Ecken in der Reihenfolge $\mathbf{0}, \mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{y}$. In der Vorlesung wurden folgende Rechenregeln bewiesen:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b}) &= \mathcal{D}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \mathcal{D}(\mathbf{c}, \mathbf{b}) \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}: \quad \mathcal{D}(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \lambda \mathcal{D}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ \text{insbesondere} \quad \mathcal{D}(-\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= -\mathcal{D}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad \mathcal{D}(\mathbf{0}, \mathbf{a}) = 0\,. \end{aligned}$$

Argumentiere, warum aus diesen Regeln folgt: $\mathcal{D}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\mathcal{D}(\mathbf{b}, \mathbf{a})$.
Für eine Matrix $A = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit den Spaltenvektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ bezeichnen wir $\mathcal{D}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =: \mathcal{D}A$. Naturgemäß ist für die Identitätsmatrix $\mathcal{D}I = 1$. Sei $E := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Zeige mit den obigen Regeln (und skizziere die entsprechenden Parallelogramme):
$$\mathcal{D}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab\,, \quad \mathcal{D}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{D}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = 1\,, \quad \mathcal{D}E = -1\,.$$

b) Zeige: $E\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, also tauscht E die x- und y-Achsen aus.

c) Betrachte $E\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$, um zu argumentieren, dass die Abbildung $\mathbf{x} \mapsto E\mathbf{x}$ Uhrzeigersinn und Gegenuhrzeigersinn austauscht.

Aufgabe 11.3 (Die Determinante) (20 Punkte)

Sei $\epsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad ijk = 123,\ 231,\ 312 \\ -1 & \text{für} \quad ijk = 132,\ 213,\ 321 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

das schiefsymmetrische Levi-Civita Symbol.

a) Prüfe nach, dass $\epsilon_{rst} = -\epsilon_{srt} = -\epsilon_{tsr} = -\epsilon_{rts}$, also dass das Vertauschen von zwei Indices ϵ mit -1 multipliziert.

b) Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definieren wir: $\det A = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_{i1}\, a_{j2}\, a_{k3}$.
Schreibe alle $(3! = 6)$ Summanden in diesem Ausdruck ausdrücklich aus.

c) Zeige, dass der Ausdruck $\det A = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k}$

die gleichen Summanden wie in b) hat.

d) Folgere aus der Definition in c), dass:

i) falls sich die Matrix $\widetilde{A}$ dadurch ergibt, dass zwei Zeilen von A vertauscht werden, dann gilt: $\det \widetilde{A} = -\det A$,

ii) falls zwei Zeilen von A gleich sind, dann gilt: $\det A = 0$,

iii) falls sich die Matrix $\widetilde{A}$ dadurch ergibt, dass zu einer Zeile von A das Vielfache einer anderen Zeile addiert wird, dann gilt: $\det \widetilde{A} = \det A$,

iv) falls sich die Matrix $\widetilde{A}$ dadurch ergibt, dass eine Zeile von A mit $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert wird, dann gilt: $\det \widetilde{A} = \lambda \det A$.

e) Benutze d), um die schöne und nützliche Formel $\epsilon_{rst}\, a_{ir}\, a_{js}\, a_{kt} = \epsilon_{ijk} \det A$ zu erhalten. (Wir benutzen hier die Summationskonvention.)

Benutze die Tatsache, dass $\det A = \det A^T$, um zu zeigen, dass $\epsilon_{ijk}\, a_{ir}\, a_{js}\, a_{kt} = \epsilon_{rst} \det A$.

f) Beweise mit der letzten Formel in e), dass $\det AB = \det A \det B$.

g) Zeige, dass der in b) erhaltene Ausdruck gleich ist wie

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

f) Berechne mit dem Resultat von g): $\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $\det \begin{pmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{pmatrix}$.

g) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Zeige, dass $\det(tI - A) = t^2 + ut + v$, wobei u und v die zu bestimmenden Ausdrücke in a, b, c, d sind. Zeige durch direkte Rechnung, dass $A^2 + uA + vI = 0$.

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

WS 2010/11 Blatt 12 (Aufgabe 12.1 - 12.4)
Abgabe in den Übungen: 18./19.01.2011

Aufgabe 12.1 (Determinanten I) (8 Punkte)

a) Berechne die folgenden Determinanten:

$$A := \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad B := \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}, \quad C := \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

$$D := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix}, \quad E := \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}, \quad F := \begin{vmatrix} 2 & x & z \\ x & 2 & y \\ z & y & 2 \end{vmatrix}.$$

Überlege in jedem Fall, ob eine Berechnung oder ein Argument schneller zum Ergebnis führt als die Anwendung der Entwicklungsformel von Laplace (z. B. durch Überführung in eine Dreiecksmatrix).

b) Zeige:

$$G := \begin{vmatrix} 1-p & 1 & 1 \\ 1 & 1-q & 1 \\ 1 & 1 & 1-r \end{vmatrix} = pqr\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1\right)$$

$$H := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = xyz\ .$$

Aufgabe 12.2 (Determinanten II) (T)

a) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich die Inverse einer invertierbaren Matrix A berechnen läßt durch: $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$, wobei $\widetilde{A} = \operatorname{Adj} A$ die Adjunkte von A ist.
Nun zeige: $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

b) Zeige: $\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = (t-1)^2(t+2)$, $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & 1ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+1\,.$

c) Entwickle geschickt nach einer Zeile oder Spalte:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} .$$

d) Seien $(a_1, a_2),\ (b_1, b_2),\ (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ die Eckpunkte eines Dreiecks. Zeige, dass der Inhalt dieses Dreiecks gegeben ist durch: $J = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$.

Aufgabe 12.3 (Radius des umschreibenden Kreises eines Dreiecks) (4 Punkte)

Betrachte ein Dreieck mit den Eckpunkten $(a_1, a_2),\ (b_1, b_2),\ (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, die dem Kreise $\langle \mathbf{x}\,, \mathbf{x} \rangle = r^2$ einbeschrieben sind. Argumentiere, dass der Ausdruck für den Inhalt eines Dreiecks aus 12.2 d) folgende Formen annimmt:

$$2J = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & r \\ b_1 & b_2 & r \\ c_1 & c_2 & r \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} -a_1 & -b_1 & -c_1 \\ -a_2 & -b_2 & -c_2 \\ r & r & r \end{vmatrix} .$$

Benutze das Produkt aus der zweiten und dritten Form von J, um zu zeigen, dass:

$$4J^2 = \frac{1}{8r^2} \begin{vmatrix} 0 & d_{\mathbf{ab}}^2 & d_{\mathbf{ac}}^2 \\ d_{\mathbf{ab}}^2 & 0 & d_{\mathbf{bc}}^2 \\ d_{\mathbf{ac}}^2 & d_{\mathbf{bc}}^2 & 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad d_{\mathbf{xy}} := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| , \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} = \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} .$$

Nun zeige: Falls die Seitenlängen des Dreiecks $\alpha = d_{\mathbf{bc}}$, $\beta = d_{\mathbf{ac}}$, $\gamma = d_{\mathbf{ab}}$ sind, ist

$$r = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\,J} .$$

Aufgabe 12.4 (Inverse Matrizen) (8 Punkte)

Invertiere folgende Matrizen durch die Berechnung der Determinanten und Adjunkten:

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} , \ B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} , \ C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \ D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & i & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} .$$

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

WS 2010/11 Blatt 13 (Aufgabe 13.1 - 13.6)
Abgabe in den Übungen: 25./26.01.2011

Aufgabe 13.1 (Die Cramersche Regel I) (T)

Löse mit der Cramerschen Regel die linearen Gleichungssysteme:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & i & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(Vergleiche b) mit Aufgabe 2.2.)

Aufgabe 13.1 (Die Cramersche Regel II) (4 Punkte)

Löse mit der Cramerschen Regel die linearen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 1 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= -7 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 13.3 (Vektoranalysis in $\mathbb{R}^3$) (4 Punkte)

Bezeichne das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$ durch $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} := \langle \mathbf{u}\,,\, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i,j} \delta_{ij}\, u_i\, v_j$ und das Vektorprodukt durch $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \sum_{i,j} \epsilon_{ijk}\, u_j\, v_k$. Zeige mit Hilfe von ϵ_{ijk} und δ_{ij} , dass für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

i) $\langle \mathbf{w}\,,\, (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{v}\,,\, (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \rangle = \langle \mathbf{u}\,,\, (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \rangle$

ii) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \langle \mathbf{u}\,,\, \mathbf{w} \rangle \mathbf{v} - \langle \mathbf{u}\,,\, \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}$ (Graßmann-Identität)

iii) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ (Jacobi-Identität)

iv) $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}\,,\, \mathbf{w} \times \mathbf{y} \rangle = \langle\, \mathbf{u}\,,\, \mathbf{w}\, \rangle \langle\, \mathbf{v}\,,\, \mathbf{y}\, \rangle - \langle\, \mathbf{v}\,,\, \mathbf{w}\, \rangle \langle\, \mathbf{u}\,,\, \mathbf{y}\, \rangle$ (Lagrange-Identität).

Aufgabe 13.4 (Komplexe Zahlen I) (T)

Sei $z = a+bi \in \mathbb{C}$, dann definieren wir die zu z *komplex konjugierte* Zahl durch $\bar{z} := a-bi$ und die *Norm* von z durch $|z| := \sqrt{\bar{z}z}$.

a) Zeige, dass die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ $\mathbb{R}$–linear ist.

b) Zeige, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt: $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$. Folgere, dass $|zw| = |z|\ |w|$.

c) Beweise die verallgemeinerte Dreiecksungleichung:
$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$. Wann gilt die Gleichheit?

d) Argumentiere geometrisch, dass $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$,
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan(\arg z) = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$.

Aufgabe 13.5 (Komplexe Zahlen II) (4 Punkte)

a) Zerlege in Real- und Imaginärteile: $z := \left(\dfrac{8-i}{5+i}\right)^4$, $w := \dfrac{1}{i + \dfrac{1}{i + \dfrac{1}{i+1}}}$

(Natürlich darf für Ausdrücke wie $(a-ib)^n$ die binomische Formel angewandt werden.)

b) Bringe die folgenden als Produkt von Linearfaktoren gegebenen Polynome auf die Gestalt $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

i) $(x - \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})) \cdot (x - \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}))$

ii) $(x - \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})) \cdot (x - \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}))$

iii) $(x + 1) \cdot (x - \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})) \cdot (x - \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}))$

iv) $(x - \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})) \cdot (x - \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})) \cdot (x+1) \cdot (x - \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})) \cdot (x - \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}))$.

Aufgabe 13.6 (Komplexe Zahlen) (8 Punkte)

a) Argumentiere, dass die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $z \mapsto w \cdot z$ für $w \neq 0$ fest, auf der komplexen Zahlenebene geometrisch eine Drehung um den Winkel $\arg w$ zusammen mit einer Streckung um $|w|$ darstellt.

b) Zeige, wenn möglich geometrisch:

$$(1+i)^4 = -4 \quad , \quad (1+i)^{13} = -2^6(1+i) \quad , \quad (1+i\sqrt{3})^6 = 2^6$$

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^2} = -4i \quad , \quad \frac{(1+i)^5}{(\sqrt{3}+i)^2} = -\sqrt{2}e^{i(-\pi/12)} \ .$$

c) Zeige mit Eulers Formel:

i) $\cos 3\vartheta = 4\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta$, $\sin 3\vartheta = -4\sin^3\vartheta + 3\sin\vartheta$,

ii) $\cos^4\vartheta = \frac{1}{8}(\cos 4\vartheta + 4\cos 2\vartheta + 3)$.

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

WS 2010/11 Blatt 14 (Aufgabe 14.1 - 14.6)
Abgabe in den Übungen: 1./2.02.2011

Aufgabe 14.1 (Geometrie und komplexe Arithmetik) (10 Punkte)

a) Zeige mit Hilfe des Produktes $(2+i)(3+i)$: $\quad \dfrac{\pi}{4} = \arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3}$.

c) Beweise: Ist $z = e^{i\tau} \neq -1$, so folgt $(z-1) = (i\tan\frac{\tau}{2})(z+1)$;
(i) durch Rechnung, (ii) durch eine Skizze.

d) Zeige: $\quad e^{i\tau} + e^{i\phi} = 2\cos\left(\frac{\tau-\phi}{2}\right) e^{i\frac{\tau+\phi}{2}} \quad$ und $\quad e^{i\tau} - e^{i\phi} = 2i\sin\left(\frac{\tau-\phi}{2}\right) e^{i\frac{\tau+\phi}{2}}$
(i) durch Rechnung, (ii) durch eine Skizze.

e) Ist c eine feste komplexe Zahl und R eine feste reelle Zahl, so erkläre mit einer Skizze, warum $|z-c| = R$ die Gleichung eines Kreises ist.

f) Genügt z der Gleichung $|z+3-4i| = 2$, so bestimme den minimalen und maximalen Wert von $|z|$ und die dazugehörige Position von z. (Tipp: Skizze!)

g) Sind a, b feste komplexe Zahlen, so zeige anhand eines Bildes, dass $|z-a| = |z-b|$ die Gleichung einer Geraden ist.

Aufgabe 14.2 (Exponentialfunktion) (T)

a) Schreibe die Reihen für die Exponentialfunktion, die Sinus- und die Cosinusfunktion auf und zeige damit, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die *Formel von Euler und de Moivre* $\exp ix = \cos x + i \sin x$ gilt.

b) Folgere aus a) und der Formel $\exp(x+a) = \exp(x)\cdot\exp(a)$:

   i) die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus,

   ii) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und somit, dass $\exp(ix)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis $\{|z| = 1; z \in \mathbb{C}\}$ ist,

   iii) $\exp(ix + i2\pi) = \exp(ix)$.

c) *Polarkoordinatendarstellung*: Zeige, dass sich jede komplexe Zahl $z \neq 0$ eindeutig in der Form $z = r\exp(i\varphi)$ mit $r \in \mathbb{R}_+$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ darstellen läßt.

Aufgabe 14.3 (Vektorräume) (T)

Sei V ein K-Vektorraum, X eine beliebige nichtleere Menge und $\mathrm{Abb}(X, V)$ die Menge der Funktionen $f : X \to V$. Zeige: Falls Addition und skalare Multiplikation von Funktionen in $\mathrm{Abb}(X, V)$ punktweise definiert sind, dann ist $\mathrm{Abb}(X, V)$ ein K-Vektorraum.

Aufgabe 14.4 (Lineare Abhängigkeit) (6 Punkte)

Für $q \in \mathbb{Q}$ sei

$$\begin{aligned} W_q : \mathbb{Q}_2[X] &\to \mathbb{Q} \\ P(X) &\mapsto W_q(P) := P(q) \,, \end{aligned}$$

also ordnet W_q einem Polynom seinen Wert an der Stelle q zu. W_q ist ein Element von $\mathrm{Abb}(\mathbb{Q}_2[X], \mathbb{Q}) := \{f : \mathbb{Q}_2[X] \to \mathbb{Q}\}$ und da $\mathbb{Q}$ ein Vektorraum ist, ist $\mathrm{Abb}(\mathbb{Q}_2[X], \mathbb{Q})$ auch ein Vektorraum.

a) Zeige: Je drei der Elemente $W_{-1}, W_0, W_1, W_2 \in \mathrm{Abb}(\mathbb{Q}_2[X], \mathbb{Q})$ sind linear unabhängig.

b) Zeige: Alle vier Elemente $W_{-1}, W_0, W_1, W_2 \in \mathrm{Abb}(\mathbb{Q}_2[X], \mathbb{Q})$ sind linear abhängig.

c) Gegeben seien reelle Zahlen $q_1 < q_2 < q_3$, y_1, y_2, y_3. Zeige: Es gibt genau ein quadratisches Polynom $P(X) = aX^2 + bX + c$ mit $P(q_j) = y_j$ für $j = 1, 2, 3$.

d) Suche Zahlen $q_1 < q_2 < q_3 < q_4$, y_1, y_2, y_3, y_4 , so dass es kein quadratisches Polynom mit $P(q_j) = y_j$ für $j = 1, 2, 3, 4$ gibt.

Aufgabe 14.5 (Basen von $\mathbb{Q}_3[X]$) (4 Punkte)

Begründe kurz, welche der folgenden Mengen eine Basis, ein Erzeugendensystem oder linear unabhängig in $\mathbb{Q}_3[X]$ sind (Dies kann *wirklich* ohne Gleichungssysteme beantwortet werden.):

a) $\{1\,,\ X-1\,, X^2-5X\,,\ 17X^3+273X^2+101\}$

b) $\{X(X-1)(X-2)\,,\ X(X-1)(X-3)\,,\ 56X(X-1)(X-5)\}$

c) $\{X(X-1)(X-2)\,,\ X(X-1)(X-3)\,,\ X(X-2)(X-3)\,,\ (X-1)(X-2)(X-3)\}$

d) $\{X^3\,,\ X^3-X^2\,,\ X^3-5X^2+37X\,,\ X^3-400X^2+1\,,\ 1\}$

e) Die Menge $\mathbb{Q}_2[X]$

f) $\{1\,,\ X\,,\ X^2\}$ (Bemerke: dies ist eine Basis, aber von $\mathbb{Q}_2[X]$)

g) $\{1\,,\ X\,,\ 456X^3+345X^2+187X+471\}$

h) $\{1\,,\ 1+X\,,\ 1+X+\frac{1}{2}X^2\,,\ 1+X+\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{6}X^3\}$.

Aufgabe 14.6 (Basis) (T)

Bestimme den Spann und dessen Dimension in $\mathbb{Q}^4$ der Spaltenvektoren folgender Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

Welche der Mengen von Spaltenvektoren sind eine Basis ihres Spanns?

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

WS 2010/11 Blatt 15 (Aufgabe 15.1 - 15.6)
keine Abgabe, aber klausurrelevant

Aufgabe 15.1 (Lineare Unabhängigkeit und lineare Abbildungen)

a) Zeige, dass die rationalen Funktionen

$$f_1(x) = \frac{4711}{x-1}, \qquad f_2(x) = \frac{6783}{x-2}, \qquad f_3(x) = \frac{5/9}{x-3}$$

linear unabhängig sind. Die Bearbeitung mittels eines 3×3–Gleichungssystems gilt als Notlösung. Beachte, dass falls die Bilder einer linearen Abbildung eines Vektorraumes $\{L(v_1), \ldots, L(v_k)\}$ linear unabhängig sind, so sind auch die Urbilder $\{v_1, \ldots, v_k\}$ stets linear unabhängig.

b) Bestimme $A, B, C \in \mathbb{Q}$, so dass

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = A\frac{4711}{x-1} + B\frac{6783}{x-2} + C\frac{5/9}{x-3}$$

und zeige mit a) die Eindeutigkeit dieser Lösung.

Aufgabe 15.2 (Vektoren austauschen)

a) Betrachte die Vektoren $v_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3, 4$,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 1e_1 + 3e_2 + 5e_3 \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 3e_1 + 5e_2 + 7e_3$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3e_1 + 1e_2 - 1e_3 \quad , \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 3e_1 + 4e_2 + 5e_3 ,$$

wobei $\{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.

Warum sind die Vektoren $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear abhängig? (Ohne Rechnng!)

Tausche auf der rechten Seite sukzessiv e_i gegen v_i aus, um die linear Abhängigkeiten der Vektoren $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ zu bestimmen.

b) Betrachte die beiden Untervektorräume E_1, E_2 von $\mathbb{R}^3$, die definiert sind als

$$E_1 := \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_2 := \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Gib Basen für E_1 und E_2 an und bestimme $\dim_{\mathbb{R}}(E_1)$ und $\dim_{\mathbb{R}}(E_2)$.
Zeige: $E_1 = E_2$.

Aufgabe 15.3 (Lineare Unabhängigkeit und Dimensionsformel)
Sei V ein K-Vektorraum und $u, v \in V$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

a) $\dim(\mathrm{span}(\{u, v\}) = 2$

b) Es gibt eine lineare Abbildung $\varphi : \mathrm{span}(\{u, v\}) \to K^2$ mit $\varphi(u) = (1, 0)$ und $\varphi(v) = (0, 1)$

c) Die Vektoren u, v sind linear unabhängig .

(Hinweis: Zeige a) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a), so entfällt die Notwendigkeit z.B. c) $\Rightarrow$ a) zu beweisen).

Aufgabe 15.4 (Untervektorräume und Dimensionsformel)

a) Sei: $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2z + w = 0\,,\ -x + y + z - 3w = 0\}$,
$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z + 2w = 0\,,\ y + z - 3w = 0\}$.

Erkläre, warum U und V Unterräume von $\mathbb{R}^4$ sind. Finde eine Basis von $U \cap V$, erweitere diese zu einer Basis von U und erweitere die resultierende Basis zu einer Basis von $U + V$.

b) Zeige, dass: $E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist.
Ist diese Basis eindeutig?

Aufgabe 15.5 (Polynome in der Basis $\{\mathbf{1}, (\mathbf{X} - \mathbf{a}), \ldots, (\mathbf{X} - \mathbf{a})^{\mathbf{n}}\}$)
Es sei $a \in \mathbb{Q}$ fest gewählt.

a) Zeige mittels linearer Abbildungen (Differenzieren und Auswerten an der Stelle $X{=}a$), dass $\{1,\ (X - a),\ \ldots,\ (X - a)^n\}$ eine Basis von $\mathbb{Q}_n[X]$ ist, und sich somit jedes Polynom $P(X) \in \mathbb{Q}_n[X]$ als Linearkombination dieser Basisvektoren schreiben läßt. Das heißt, es gibt Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Q}$ mit

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{j=0}^{n} b_j (X - a)^j \ .$$

b) Gib einen expliziten Algorithmus für die Berechnung der Koordinaten b_j bezüglich der Basis $\{(X - a)^j\ , j = 0, \ldots, n\}$ aus dem Koordinaten a_k bezüglich der Basis $\{X^k\ , k = 0, \ldots, n\}$ an.
(Hinweis: Benutze die Binomische Formel für $((X - a) + a)^k$).

Aufgabe 15.6 (Definitionen)
Inzwischen müssten die grundlegenden Definitionen längst verinnerlicht sein.
Schreibe in Schönschrift, aus dem Gedächtnis, die Definitionen von **Gruppe, Vektorraum, Untervektorraum, linearer Abbildung, Isomorphismus, injektv, surjektiv, bijektiv, linear abhängig, linear unabhängig, Spann, Erzeugendensystem** und **Basis** auf.
Nun korrigiere die Definitionen selbst und hänge das Blatt auf, wo es mindestens zweimal am Tag gelesen wird (z.B. gegenüber vom Klo?). Wiederhole die Übung jeden Tag, bis alle Definitionen ohne Fehler wiedergegeben werden können.

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

WS 2010/11 Blatt 16 (Aufgabe 16.1 - 16.5)
Abgabe in den Übungen der 1. Vorlesungswoche des Sommersemesters

---

Aufgabe 16.1 (Zyklische Gruppe) (3 Punkte)

Auf der Menge der Restklassen modulo q

$$\mathbb{Z}_q = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = \{[n] = n + q\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

können wir eine Addition definieren durch $[m] + [n] = [m + n]$.
Zeige: Mit dieser Addition als Verknüpfung ist $\mathbb{Z}_q$ eine abelsche Gruppe mit q Elementen $[0], [1], \ldots, [q-1]$.
Diese Gruppe heißt *Zyklische Gruppe der Ordnung* q: Addieren wir zu einem beliebigen Element von $\mathbb{Z}_q$ das Element $[1]$, dazu wieder $[1]$ usw., dann durchlaufen wir nacheinander alle Elemente von $\mathbb{Z}_q$ bis wir nach q Schritten zum Ausgangspunkt zurückkehren.

Aufgabe 16.2 (Gleichungssysteme) (6 Punkte)

a) Löse über $\mathbb{Q}$ das Gleichungssystem: $3x + 3y = 2$, $2x + 5y = 3$.

b) Bestimme die Multiplikationstafel für Rechnungen modulo 7.

c) Löse das folgende Kongruenzsystem, indem *dasselbe Verfahren* wie in a) mit der Multiplikationstabelle aus b) benutzt wird:

$$3x + 3y \equiv 2 \pmod 7 , \qquad 2x + 5y \equiv 3 \pmod 7 .$$

d) Warum ist das Kongruenzsystem $3x + 4y \equiv 2 \pmod 7$, $2x + 5y \equiv 3 \pmod 7$ nicht lösbar?

e) Nutze das Gauss-Eliminationsverfahren, um das folgende Kongruenzsystem modulo 7 zu lösen:

$$\begin{aligned}
x + 3y + 4z + w &\equiv 2 \\
2x + 6y + 2z + w &\equiv 6 \\
3x + 2y + 6z + 2w &\equiv 1 \\
4x + 5y + 5z + w &\equiv 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 16.3 (Rechnen mit Kongruenzen) (4 Punkte)

a) Kongruenzklassen modulo 7 lassen sich addieren und multiplizieren. Sei $\mathbb{F}_7$ die Menge aller Kongruenzklassen modulo 7, repräsentiert durch $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Zeige mit Hilfe der Multiplikationstabelle von Aufgabe 16.2, dass $\mathbb{F}_7$ ein Körper ist.

b) Zeige möglichst einfach, dass die Menge der Kongruenzklassen modulo 4 kein Körper ist.

c) Sei $\mathbb{F}_7[X]$ die Menge aller Polynome mit Koeffzienten in $\mathbb{F}_7$. Man kann solche Polynome koeffzientenweise addieren, also

$$\begin{aligned} & (3X+5) \bmod 7 + (4X^2+4X+2) \bmod 7 \\ \equiv\ & 4X^2 \bmod 7 + ((3+4)X) \bmod 7 + (5+2) \bmod 7 \\ \equiv\ & 4X^2 \bmod 7\ . \end{aligned}$$

Man kann ein Polynom auch mit einem Element von $\mathbb{F}_7$ multiplizieren, also

$$(4 \bmod 7) \cdot ((3X+1) \bmod 7) \equiv (12X+4) \bmod 7 \equiv (5X+4) \bmod 7\ .$$

Zeige, dass $\mathbb{F}_7[X]$ mit diesen Rechenregeln zu einem $\mathbb{F}_7$–Vektorraum wird. Schreibe den Beweis so auf, dass nur benutzt wird, dass $\mathbb{F}_7$ die Körperaxiome erfüllt.

d) Warum hat ein quadratisches Polynom $P \in \mathbb{F}_7[X]$, $P \neq 0$, höchstens zwei Nullstellen?

Aufgabe 16.4 (Kleiner Satz von Fermat) (3 Punkte)

Berechne mit Hilfe der Multiplikationstabelle von Aufgabe 16.2:

$$a^6 \quad \text{für alle } a \in \mathbb{F}_7\ .$$

Aufgabe 16.5 (Körperaxiome) (4 Punkte)

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, seien $a, b, c, d \in K$, $b \neq 0$, $d \neq 0$. Beweise folgende Aussagen und gib bei jedem Schritt an, welches Axiom bzw. welcher Satz benutzt wird:

a) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \iff ad = bc$

b) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$

c) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

d) $\left(\dfrac{a}{b}\right) \cdot \left(\dfrac{c}{d}\right)^{-1} = \dfrac{ad}{bc}$ (Hier sei auch $c \neq 0$).

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie
Klausur vom 21.2.2011

Sie haben 100 Minuten Zeit. Achten Sie darauf, dass eine knappe Argumentation direkter zum Ziel führen kann als eine lange Rechnung.

Aufgabe 1 (30 Punkte)

i) Definiere das *Bild*, den *Rang* und den *Kern* einer linearen Abbildung $L : K^n \to K^m$.

ii) Gib drei äquivalente Kriterien für die Invertierbarkeit von $n \times n$ Matrizen an.

iii) Betrachte $A := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Prüfe nach, ob A und B invertierbar sind, und gegebenenfalls invertiere. Ist AB invertierbar? Bestimme die Ränge von A und B? Betrachte die Teilmenge $Z \subset \mathbb{Q}^3$ der Zeilenvektoren von A. Gib eine Basis von $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(Z)$ an.

b) Bestimme die Lösungsmengen in $\mathbb{R}^3$ der linearen Gleichungssysteme

$$A\,x \;:=\; \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$B\,x \;:=\; \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Was sind die Dimensionen der Lösungsräume?

c) Was sind die Kerne von A und B?
Gib gegebenenfalls eine nichttriviale Linearkombination der Spaltenvektoren, die den Nullvektor darstellt, an.

Aufgabe 2 (13 Punkte)

a) Betrachte ein durch $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ aufgespanntes Parallelogramm (also mit den Ecken $\mathbf{0}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$). Beschreibe die Diagonalen dieses Parallelogramms bezüglich der Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ und zeige, dass diese Diagonalen einander halbieren.

b) Betrachte ein Tetraeder mit den Ecken $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^3$.
Der Schwerpunkt des Dreiecks mit den Ecken $\mathbf{v}_i$, $i \neq j$, ist gegeben durch $\mathbf{w}_j := \frac{1}{3} \sum\limits_{i \neq j} \mathbf{v}_i$.

Zeige: Die 4 Geraden

$$L_{\mathbf{v}_j \mathbf{w}_j} := \{\lambda_j \mathbf{v}_j + (1 - \lambda_j)\mathbf{w}_j \mid \lambda_j \in \mathbb{R}\}\ ,\ 1 \leq j \leq 4\,,$$

die $\mathbf{v}_j$ und $\mathbf{w}_j$ verbinden, treffen sich am Schwerpunkt des Tetraeders.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

a) Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} W_a : \mathbb{Q}_2[X] &\rightarrow \mathbb{Q} \\ P(X) &\mapsto P(a)\,, \end{aligned}$$

wobei $P(a)$ der Wert des Polynoms $P(x)$ an der Stelle $X{=}a \in \mathbb{Q}$ ist. Ist diese Abbildung linear? (Begründe, warum oder warum nicht!)

b) Benutze geeignete lineare Abbildungen (ohne Betrachtung eines linearen Gleichungssystems), um zu zeigen, dass die folgenden quadratischen Polynome aus $\mathbb{Q}_2[X]$ linear unabhängig sind:

$$P_1(X) = \frac{(X-2)(X-3)}{(1-2)(1-3)}\,, \quad P_2(X) = \frac{(X-1)(X-3)}{(2-1)(2-3)}\,,$$

$$P_3(X) = \frac{(X-1)(X-2)}{(3-1)(3-2)}\,.$$

c) Warum bildet $(P_1(X), P_2(X), P_3(X))$ eine Basis für $\mathbb{Q}_2[X]$?

d) Finde in dieser Basis das quadratische Polynom $Q(X)$, das an den drei Stellen $X = 1, 2, 3$ den Wert $\frac{315}{19}$ hat.

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

SS 2011 Blatt 17 (Aufgabe 17.1 - 17.7)
Abgabe in den Übungen: 19./20.04.2011

Aufgaben mit Punkten sind abzugeben; die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben dienen dem Selbststudium und können in den Tutorien diskutiert werden.

Aufgabe 17.1 (Körperaxiome) (T)

Lässt sich mit den Zahlenpaaren (a, b), $a, b \in \mathbb{Q}$, so rechnen, dass die Körperaxiome erfüllt sind?
Zeige, dass mit der Addition der "Komponenten", $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$, eine kommutative Gruppe gegeben ist.
Versuche zunächst die Multiplikation durch $(a, b) * (c, d) := (ac, bd)$ zu definieren.
Welches Körperaxiom ist dann nicht zu erfüllen?
Was ändert sich, wenn (a, b) als $(a + b\sqrt{2})$ umgedeutet wird? Zeige, dass dann ein Körper gegeben ist.

Aufgabe 17.2 (Kleinsche Vierergruppe II) (T)

Die Zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_q$ wurde in Aufgabe 16.1 eingeführt. Betrachte nun die Gruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ mit den Elementen $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. Bestimme die Gruppentafel. Gibt es eine Verbindung zur Gruppentafel der Abbildungen V_4 in Aufgabe 9.2? Zeige also, dass die Gruppe $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2\ ,\ +)$ *isomorph* zu der Kleinschen Vierergruppe $(V_4\ ,\ \circ)$ ist.

Aufgabe 17.3 (Untergruppe) (5 Punkte)

Eine nichtleere Teilmenge $U \subset G$ bildet eine Untergruppe $(U\ ,\ \circ)$ von $(G\ ,\ \circ)$ genau dann, wenn U bezüglich der Verknüpfung $\circ$ selbst wieder eine Gruppe ist. Also, $(U\ ,\ \circ)$ erfüllt alle Gruppenaxiome. Zeige, dass die Kleinsche Vierergruppe $(V_4\ ,\ \circ) \sim (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2\ ,\ +)$ (s. Aufgabe 17.2) eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_4 ist.

Aufgabe 17.4 (Vollständige Induktion) (T)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $S_1(n)$ die Summe aller natürlichen Zahlen zwischen 1 und n, $S_2(n)$ die Summe der Quadrate aller natürlichen Zahlen zwischen 1 und n, usw.
Beweise durch vollständige Induktion, dass für alle n gelten:

$$\begin{aligned} S_1(n) &:= \sum_{m=1}^{n} m = \frac{n(n+1)}{2}\ , \\ S_2(n) &:= \sum_{m=1}^{n} m^2 = \tfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\ , \\ S_3(n) &:= \sum_{m=1}^{n} m^3 = \tfrac{1}{4} n^2 (n+1)^2\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 17.5 (Polynomfaktorisierungen) (5 Punkte)

a) Beweise mittels Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Q}$:

$$X^n - a^n = (X-a)\sum_{k=0}^{n-1} X^{n-k-1}a^k \ .$$

$\left(\text{Hinweis: Verwende } \sum_{k=0}^{n+1} b_k := b_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} b_k \ .\right)$

b) Zeige unter Verwendung von a), dass sich für jedes Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$ und für jedes $a \in \mathbb{Q}$ ein $Q_a \in \mathbb{Q}[X]$ finden läßt, für das $P(X) - P(a) = (X-a)Q_a(X)$ gilt.

Aufgabe 17.6 (Koeffizienten an der Entwicklungsstelle) (5 Punkte)

Beweise mittels Induktion für alle $a \in \mathbb{Q}$ die binomische Formel

$$(a+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}X^k \ .$$

Wende diese Formel auf $X = a + (X-a)$ an, um auf eine andere Weise als in Aufgabe 17.5 zu zeigen, dass es Zahlen $b_k \in \mathbb{Q}$ gibt mit

$$P(X) - P(a) = \sum_{k=1}^{n} b_k (X-a)^k \ .$$

Wir sagen dazu auch, dass wir das Polynom $P(X)$ an der Stelle $X{=}a$ entwickeln. Wie hängen die Werte $P^{(k)}(a)$, der k-ten Ableitung von P an der Stelle a, mit den Entwicklungskoeffizienten b_k zusammen?

Aufgabe 17.7 (Binomische Formeln) (5 Punkte)

Es seien $A, B, I \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei I die Einheitsmatrix ist.

a) Berechne: $(A+B)^3$, $(I+B)^3$. (Klammern auflösen und dabei beachten, dass im allgemeinen $AB \neq BA$)

b) Zeige, dass für alle $k > 0$ und kommutierende Matrizen A, B mit $A^0 := I$ die folgenden Formeln gelten:

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j} \quad , \qquad A^k - B^k = (A-B) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j}B^j \ .$$

(Vergleiche Aufgaben 17.5 und 17.6.)

c) Berechne C^5 mit Hilfe von b) für $C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

SoSe 2011 Blatt 18 (Aufgabe 18.1 - 18.6)
Abgabe in den Übungen: 26./27.04.2011

Aufgabe 18.1 (Polynomdivision I) (6 Punkte)

a) Bestimme die Polynome $P \in \mathbb{Q}[X]$ (vom Grade ?), damit:

i) $X^4 - a^4 - 4a^3(X-a) = (X-a)^2 \cdot P(X)$ mit $a \in \mathbb{Q}$ fest gewählt,

ii) $X^7 - 3X^6 + 2X^5 - 3X^3 + 10X^2 - 9X + 2 = (X^2 - 3X + 2) \cdot P(X)$,

iii) $X^n - 1 = (X-1) \cdot P(X)$ mit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

b) Rechne i) $Q, R \in \mathbb{F}_7[X]$ und ii) $Q, R \in \mathbb{Q}[X]$ aus, so dass

$$F(X) := X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 2X + 1 \;=\; (X+6) \cdot Q \;+\; R\ .$$

Prüfe nach, dass $R = W_1(F) := F(1)$ (der Wert des Polynoms F an der Stelle $1 \in \mathbb{F}_7$) und erkläre diese Gleichheit.

Aufgabe 18.2 (Polynomdivision II) (T)

a) Dividiere jeweils $F \in \mathbb{R}[X]$ mit Rest durch $G \in \mathbb{R}[X]$:

i) $F(X) = X^6 + 3X^4 + X^3 - 2\ ,\ G(X) = X^2 - 2X + 1$

ii) $F(X) = X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1\ ,\ G(X) = X + 1$ mit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

ii) $F(X) = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1\ ,\ G(X) = X^2 - 2X + 3$

b) Betrachte $R(X) := X^5 - 4X^4 + 8X^3 - 10X^2 + 7X - 2$.

Was ist die Vielfachheit der Nullstelle $X{=}1$? Wie viele Nullstellen besitzt $R(X)$?

Aufgabe 18.3 (Polynomfaktorisierung) (4 Punkte)

a) Zeige, ohne Benutzung der Polynomdivision, dass es keine Polynome $P(X), Q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ gibt, sodass

i) $X^5 + 5X^2 + 2 = (X-1)P(X)$,

ii) $X^6 - X^5 + 3X^3 - 3X^2 + 7X - 7 = (X-1)^2 Q(X)$.

b) Ermittle, ohne Benutzung der Polynomdivision, durch sukzessives Abspalten der Nullstellen und deren Vielfachheiten die Linearfaktorzerlegung von

$$P(X) = X^5 + 10X^4 + 40X^3 + 80X^2 + 80X + 32\,.$$

[Tipp: Die Nullstellen sind betragskleine ganze Zahlen.]

Aufgabe 18.4 (Tangenten und Nullstellen I) (T)

Betrachte die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad ; \; x \mapsto g(x) := x^3$.

a) Wie lautet die Gleichung der Tangente bei $x = a$?

b) Bestimme die Nullstellen der Polynomfunktion $P(x) := g(x) - t_a(x)$, wobei $t_a(x)$ die Tangente bei $x = a$ bezeichnet.

c) Bestimme für $x, a \geq 0$, ob die Tangentenapproximation $t_a(x)$ eine zu große oder eine zu kleine Abschätzung für g liefert.

d) Bestimme die Nullstellen von $P'(x)$, wobei $P(x)$ die Funktion in Teil b) ist. Warum haben $P(x)$ und $P'(x)$ eine Nullstelle gemeinsam? Warum hätten wir ohne Rechnung sagen können, dass P' eine zweite Nullstelle im Intervall $(-2a, a)$ hat? (Hinweis: ein Satz aus der Analysis)

Aufgabe 18.5 (Tangenten und Nullstellen II) (4 Punkte)

Betrachte die Polynomfunktion $\; f(x) = x^3 - x$.

a) Bestimme die Gleichung für die Tangente $l_a(x)$ im Punkt $(a, a^3 - a)$.

b) Zeige, dass für alle $a \neq 0$ die Tangente den Graphen an einer weiteren Stelle $b\,(\neq a)$ schneidet.
[Tipp: Beachte die Nullstellen der Polynomfunktion $P_a(x) := f(x) - l_a(x)$.]

Aufgabe 18.6 (Taylorpolynome) (6 Punkte)

a) Es sei $a \in \mathbb{Q}$ fest vorgegeben. Ferner seien $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Q}$.
Zeige, dass es *genau ein* Polynom $Q(X) \in \mathbb{Q}_n[X]$ gibt mit

$$Q(a) = c_0 \quad , \quad Q'(a) = c_1 \quad , \ldots , \quad Q^{(n)}(a) = c_n \; .$$

b) Zeige, dass die Tangente $T(X)$ an der Stelle a zu einem Polynom $P(X)$, gegeben durch

$$T(X) := P(a) + (X - a)P'(a) \; ,$$

das einzige Polynom vom Grad ≤ 1 ist mit $T(a) = P(a)\,,\; T'(a) = P'(a)$.

c) Folgere aus a), dass es für jedes Polynom $P(X) \in \mathbb{Q}_n[X]$ und jedes $a \in \mathbb{Q}$ ein eindeutiges Polynom $T_{n,a}(X) \in \mathbb{Q}_n[X]$ gibt mit

$$T_{n,a}(a) = P(a) \; , \quad T'_{n,a}(a) = P'(a) \quad , \ldots , \quad T^{(n)}_{n,a}(a) = P^{(n)}(a) \; .$$

Das Polynom $T_{n,a}(X)$ ist das *Taylorpolynom zu P vom Grad n bei x=a.*
Speziell ist die Tangente das Taylorpolynom $t_{1,a}(X)$ vom Grad 1.

d) Zeige, dass die beiden Polynome $T_{n,a}(X)$ und $P(X)$ (vgl. Aufgabe 15.5) bezüglich der Basis $\{(X - a)^j \;, j = 0, \ldots, n\}$ die gleichen Koeffizienten haben.

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

SoSe 2011 Blatt 19 (Aufgabe 19.1 - 19.5)
Abgabe in den Übungen: 3./4.05.2011

Aufgabe 19.1 (Polynome und Polynomfunktionen mod 7) (5 Punkte)

Sei $\mathrm{Abb}(\mathbb{F}_7, \mathbb{F}_7)$ der Vektorraum aller Abbildungen $\mathbb{F}_7 \to \mathbb{F}_7$. Jedes Polynom $P(X) \in \mathbb{F}_7[X]$ liefert eine Abbildung $\mathbb{F}_7 \to \mathbb{F}_7$, indem $x \in \mathbb{F}_7$ nach $P(x) \in \mathbb{F}_7$ abgebildet wird. So haben wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} L : \mathbb{F}_7[X] &\to \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_7, \mathbb{F}_7) \\ P(X) &\mapsto L(P) := (x \mapsto P(x)) \,. \end{aligned}$$

a) Zeige, dass L eine lineare Abbildung ist.

b) Zeige, dass L surjektiv ist. (Bemerke den Unterschied zum üblichen Fall reeller Koeffizienten: Jeder "*weiß*", dass es andere Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ als Polynome gibt.)

c) Zeige, dass L injektiv ist, wenn man L auf den Untervektorraum aller Polynome in $\mathbb{F}_7[X]$ mit Grad kleiner oder gleich 6 einschränkt.

d) Rechne nach, dass in $\mathbb{F}_7[X]$ gilt:

$$X^7 - X = X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)(X-5)(X-6)$$

und folgere daraus, dass $L(X^7 - X) = 0$, was auch ganz anders ist, als bei den Polynomen mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 19.2 (N-te Wurzeln von Eins) (4 Punkte)

Betrachte die Polynome in $\mathbb{C}_N[Z]$, $P_N(Z) := Z^N - 1$, $Z \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$. Die Nullstellen in $\mathbb{C}$ nennen wir die *N-ten Wurzeln von Eins*. Benutze die Polardarstellung der komplexen Zahlen, um diese zu bestimmen. Markiere auf einer Skizze der $\mathbb{C}$-Ebene die fünften und sechsten Wurzeln von Eins. Zeige, dass diese geometrisch durch ein einbeschriebenes (bzw. umschriebenes) reguläres Polygon in (bzw. um) den Einheitskreis gefunden werden können.

Aufgabe 19.3 (Lineare Abbildungen und darstellende Matrizen I) (7 Punkte)

a) Zeige:

   i) Die Matrix $A = M_E(L)$ der linearen Abbildung $L \in \mathrm{End}\,(K^n)$ bezüglich der Basis $E = (e_1, \dots, e_n)$ hat den Bildvektor $L(e_j)$ als j-te Spalte.

   ii) $A, B \in K^{n \times n}$ sind ähnlich genau dann, wenn sie die gleiche Abbildung bezüglich zweier Basen darstellen.

   iii) Die Ähnlichkeit von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation.

b) Sei $L \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ und $M_E(L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ dessen Matrix bezüglich der Standardbasis. Finde die Matrixdarstellung von L bezüglich der Basis

$$\left(f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

c) Sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung definiert durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Berechne die darstellende Matrix $M_E(L)$ bezüglich der Standardbasis E von $\mathbb{R}^2$. Finde den ganzzahligen Vektor v mit positivem ersten Eintrag, der in $\ker L$ liegt.

Aufgabe 19.4 (Lineare Abbildungen und darstellende Matrizen II) (T)

a) Betrachte die Drehung um den Winkel α im mathematisch positiven Sinn (d.h. gegen den Uhrzeigersinn):

$$\begin{array}{rccc} D_\alpha : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y \\ \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y \end{pmatrix} \end{array}.$$

Zeige, dass D_α eine lineare Abbildung ist. Was ist die darstellende Matrix von D_α und von $D_\beta \circ D_\alpha$? Zeige unter Zuhilfenahme der trigonometrischen Additionstheoreme, dass $D_\beta \circ D_\alpha = D_{\beta+\alpha}$ gilt.
Damit haben wir eine geometrische Deutung der Additionstheoreme: Eine Drehung um die Summe zweier Winkel ist dasselbe wie die Hintereinanderausführung zweier einzelner Drehungen!

b) Seien $A = M_E(L)$, $B = M_F(L) \in K^{n \times n}$ Matixdarstellungen von $L \in \operatorname{End}(K^n)$ bezüglich der Standardbasis $E = (e_1, \ldots, e_n)$ bzw. einer beliebigen anderen Basis $F = (f_1, \ldots, f_n)$ von K^n. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Basistransformationsmatrix P durch die Regel $f_j = \sum_{i=1}^n e_i \, p_{ij}$ gegeben ist. Erkläre, warum die j-te Spalte der Matrix P der Vektor f_j ist.

Aufgabe 19.5 (Algebraische Eigenwertprobleme) (4 Punkte)

Finde die Eigenvektoren der Matrix

$$K := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

und zeige, dass nur zwei davon linear unabhängig sind.

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

SoSe 2011 Blatt 20 (Aufgabe 20.1 - 20.4)
Abgabe in den Übungen: 10./11.05.2011

Aufgabe 20.1 (Algebraische Eigenwertprobleme) (9+6 Punkte)

a) Finde die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrizen

$$F := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad G := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad H := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4-s & 2s-2 \\ 0 & -2s+2 & 4s-1 \end{pmatrix}.$$

Begründe, für welche Werte von $s \in \mathbb{R}$ die Matrix H diagonalisierbar ist?

b) **(Fibonacci Zahlen und Goldener Schnitt)**

i) Diagonalisiere $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Zeige, dass die Spektralmatrix von A die Form $\Lambda = \mathrm{diag}(\tau\,,\,-\tau^{-1})$ hat, wobei $\tau \in \mathbb{R}$ eine positive Zahl ist.

ii) Schreibe den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Eigenvektoren.

iii) Zeige, dass für alle $n \geq 1$ gilt:

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad a_n = c_1\tau + c_2\tau^{-1},$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ explizit zu bestimmen sind.
Prüfe nach, dass die Zahlenfolge $\{a_n\}$ rekursiv durch

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1, \qquad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \text{für } n > 2$$

gegeben ist. Fibonacci (1170–1250) hat diese Zahlenfolge eingeführt, um das Wachstum einer Kaninchenbevölkerung zu beschreiben.

iv) Zeige durch die Betrachtung von Determinanten die Identität von Casini:

$$a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 = (-1)^n.$$

v) Folgere aus der Beobachtung $A^nA^n = A^{2n}$, dass gilt: $a_n^2 + a_{n-1}^2 = a_{2n-1}$.

Aufgabe 20.2 (Diagonalisierung) (T)

Diagonalisiere $L := \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $M := \begin{pmatrix} -7 & -12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, $N := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

und berechne L^3, M^{100}, N^5.

Aufgabe 20.3 (Charakteristische Polynome) (T)

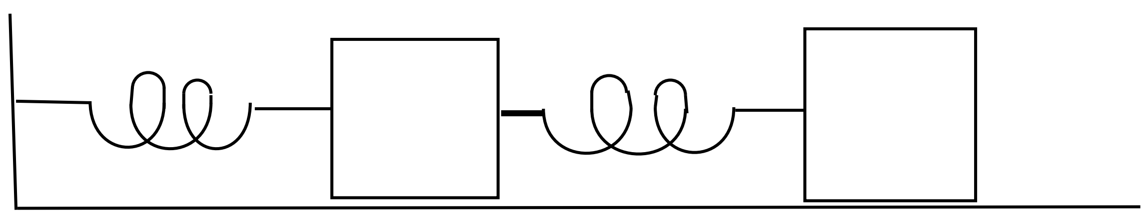
a) Zeige:
   i) Für $A \in K^{2\times 2}$ gilt: $\det(A - \lambda I) = \det A - \lambda(\mathrm{Tr}\ A) + \lambda^2$.
   ii) Für $A \in K^{3\times 3}$ gilt: $\det(A - \lambda I) = \det A - \lambda b + \lambda^2(\mathrm{Tr}\ A) - \lambda^3$,
   wobei b von A abhängt, aber muss nicht bestimmt werden.

b) Seien $L : K^2 \to K^2$ eine lineare Abbildung und $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2. Zeige, durch Anwendung $(L - \lambda_2\,\mathrm{id})$ auf beiden Seiten der Gleichung $\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 = 0$, $\alpha, \beta \in K$, dass $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ linear unabhängig sind.

c) Seien $L : K^3 \to K^3$ eine lineare Abbildung und $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Zeige, durch sukzessive Anwendung $(L - \lambda_3\,\mathrm{id})$ und $(L - \lambda_2\,\mathrm{id})$ auf beiden Seiten der Gleichung $\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3 = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in K$, dass $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 20.4 (Eigenwerte) (5 Punkte)

Betrachte die geradlinige Bewegung von zwei gleichen Massen, die untereinander und mit einer starren Wand durch Federn verbunden sind und sich ohne Einwirkung anderer Kräfte horizontal reibungslos bewegen können.



Die Massen seien beide gleich 1, die Federkonstanten seien 3 und 2. Ferner seien u_1 und u_2 die horizontalen Abweichungen der beiden Massen von der Ruhelage. Die Regeln der Mechanik ergeben, dass die Bewegungen des Systems durch die Lösungen des folgenden Systems von zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung beschrieben werden:

$$u_1'' = -5u_1 + 2u_2 \ , \quad u_2'' = 2u_1 - 2u_2 \ .$$

i) Zeige: Der Lösungsansatz $u_1 = x_1 \cos\omega t$, $u_2 = x_2 \cos\omega t$ führt auf ein homogenes System von 2 linearen Gleichungen für die zwei Unbekannten x_1, x_2, welches als Parameter die noch zu bestimmende Eigenfrequenz ω enthält.

ii) Bestimme die ω, für die dieses System eine nichttriviale Lösung hat.

iii) Bestimme die Lösungen für u_1 und u_2.

iv) Führe die analogen Überlegungen durch für $u_i = x_i \sin\omega t$.

v) Beweise, dass alle Linearkombinationen der so erhaltenen Lösungen des Differentialgleichungssystems wieder Lösungen sind.
(Bemerkung: Man kann zeigen, dass damit alle Lösungen gegeben sind. Das Beispiel zeigt, wie Schwingungsprobleme auf das Eigenwertproblem führen: die ω^2 sind die Eigenwerte.)

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

SoSe 2011 Blatt 21 (Aufgabe 21.1 - 21.5)
Abgabe in den Übungen: 17./18.05.2011

Aufgabe 21.1 (Darstellende Matrizen und Basiswechsel) (10 Punkte)

Betrachte in dem Polynomvektorraum $\mathbb{Q}_k[X]$ die lineare Abbildung ("'ableiten"):

$$\begin{aligned} L := \mathrm{diff} : \ \mathbb{Q}_k[X] &\longrightarrow \mathbb{Q}_k[X] \\ P(X) &\longmapsto P'(X)\ . \end{aligned}$$

a) Was sind die Kerne und die Bilduntervektorräume von $L,\ L^2{:=}L{\circ}L,\ L^k,\ L^{k+1}$?
Konstruiere die darstellenden Matrizen $M_A(L), M_B(L)$ bezüglich der Basen:

$$A := \left\{1,\ X,\ X^2, \dots, X^k\right\}\ ,\quad B := \left\{1\ ,\ 1+X\ ,\ 1+X+\frac{1}{2}X^2\ , \dots ,\ \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}X^n\right\}.$$

b) Wähle nun $k = 3$. Drücke die Basiselemente $e_j = X^{j-1}$, $j = 1, \dots, 4$, von A als Linearkombinationen der Basiselemente $f_i = \sum_{n=1}^{i} \frac{1}{(n-1)!} X^{n-1}$, $i = 1, \dots, 4$, von B aus, d.h. schreibe

$$e_j = \sum_{i=1}^{4} f_i\, t_{ij}\ ,\quad t_{ij} \in \mathbb{Q}\,.$$

Die Matrix $T = (t_{ij}) \in \mathbb{Q}^{4\times4}$ ist die Transformationsmatrix des Basiswechsels von A nach B. Umgekehrt liefert

$$f_j = \sum_{i=1}^{4} e_i\, u_{ij}\ ,\quad u_{ij} \in \mathbb{Q}$$

die Transformationsmatrix $U = (u_{ij}) \in \mathbb{Q}^{4\times4}$ des Basiswechsels von B nach A.

Finde die Matrizen T und U und zeige: $U = T^{-1}$.

Betrachte die Matrixdarstellungen $M_A(L), M_B(L) \in \mathbb{Q}^{4\times4}$ der Abbildung L bezüglich der Basen A bzw. B. Zeige:

$$M_B(L) = T M_A(L) T^{-1}\ ,$$

und somit, dass $M_A(L)$ und $M_B(L)$ ähnlich sind.

(Beachte: Die Basen sollen so geordnet sein, dass beide T und U, genauso wie $M_A(L)$ und $M_B(L)$, obere Dreiecksmatrizen sind.)

Aufgabe 21.2 (Lineare Abbildungen und darstellende Matrizen) (5 Punkte)

Seien $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums V und $L \in \mathrm{End}\,(V)$ die lineare Abbildung gegeben durch: $L : f_1 \mapsto f_2\ ,\ f_2 \mapsto f_3\ , \dots ,\ f_{n-1} \mapsto f_n\ ,\ f_n \mapsto f_1$.
Was ist die Matrixdarstellung für L bezüglich der Basis F? Berechne $L^2\,, L^3\,, \dots, L^n$.
Bestimme für $n = 3$ und $n = 4$ die Eigenwerte von L. Lassen sich die Eigenwerte ohne Benutzung des charakteristischen Polynoms bestimmen?

Aufgabe 21.3 (Der Satz von Cayley–Hamilton) (5 Punkte)

a) Verifiziere den Satz von Cayley–Hamilton für die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Benutze diesen Satz um A^{-1} und A^5 zu berechnen.

b) Zeige, dass $B \in K^{2\times 2}$ bzw. $C \in K^{3\times 3}$ die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$B^2 - (\mathrm{Tr}\ B)B + (\det B)I_2 = 0$$

$$C^3 - (\mathrm{Tr}\ C)C^2 + \tfrac{1}{2}\left((\mathrm{Tr}\ C)^2 - \mathrm{Tr}\ C^2\right) C - (\det C)I_3 = 0\,.$$

(Vergleiche Aufgabe 20.3a)

Aufgabe 21.4 (Die Spur) (T)

Die Spur $\mathrm{Tr}\ C = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$ ist nur für quadratische Matrizen $C = (c_{ij}) \in K^{n\times n}$ definiert.

a) Falls A eine $n \times m$ Matrix und B eine $m \times n$ Matrix ist, erkläre, warum $\mathrm{Tr}\ AB$ und $\mathrm{Tr}\ BA$ definiert sind. Zeige, dass: $\mathrm{Tr}\ AB = \mathrm{Tr}\ BA$.

b) Zeige unter Anwendung der Summationskonvention:

$$\mathrm{Tr}\,(ABC) = \mathrm{Tr}\,(BCA) = \mathrm{Tr}\,(CAB) \quad \text{für } A, B, C \in K^{n\times n}.$$

c) Zeige: $\quad P \in \mathrm{GL}\,(n, K) \quad \text{und} \quad A \in K^{n\times n} \implies \mathrm{Tr}\ P^{-1}AP = \mathrm{Tr}\ A\,.$

Dies bedeutet: Falls $\dim U < \infty$ und $L \in \mathrm{End}\,(U)$, können wir die Spur von L durch $\mathrm{Tr}\ L := \mathrm{Tr}\ A$ definieren, wobei $A = M_B(L)$ die Matrix bezüglich einer gegebenen Basis B ist. Erkläre diese Aussage!

d) Zeige: Für $A \in K^{n\times n}$ ist $\mathrm{Tr}\ A$ Koeffizient von λ^{n-1} in dem Polynom $\det(A - \lambda I)$.

e) Zeige: Falls $C \in K^{2\times 2}$ mit $\mathrm{Tr}\ C = 0$, dann ist C^2 ein Vielfaches von I.

Aufgabe 21.5 (Diagonalisierung) (T)

Finde $X \in \mathrm{GL}\,(2, \mathbb{C})$ und die diagonale Matrix $\Lambda \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, damit

$$X\Lambda X^{-1} = R_\alpha := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}\,,$$

wobei R_α die Rotationsmatrix von Aufgabe 19.4 ist. Wähle $\alpha \not\equiv 0 \mod \pi$.

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

SoSe 2011 Blatt 22 (Aufgaben 22.1 - 22.6)
Abgabe in den Übungen: 24./25.05.2011

Aufgabe 22.1 (Darstellende Matrizen und Heisenberg-Vertauschungsrelation) (6 Punkte)

Betrachte die in Aufgabe 21.1 erhaltene Matrix $M_A(L)$, die die Differentiationsabbildung bezüglich der Basis $A = (1,\ X,\ X^2, \ldots, X^k)$ darstellt.

a) Finde für $k = 4$ die Matrizen: $M(L)^2, M(L)^3, M(L)^4,\ M(L)^5$. Prüfe nach, dass sie die Verkettungen $L{\circ}L$, $L{\circ}L{\circ}L$, $L{\circ}L{\circ}L{\circ}L$, $L{\circ}L{\circ}L{\circ}L{\circ}L$ darstellen. Beachte, dass die Dimension der Kerne dieser Abbildungsmatrizen gleich $(k{+}1 - \mathrm{Rang(M)})$ ist.

b) Es lässt sich leicht eine Matrixdarstellung $M(L_k) \in \mathbb{Q}^{k\times(k+1)}$ der Abbildung

$$L_k := \mathrm{diff}: \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{Q}_k[X] & \longrightarrow & \mathbb{Q}_{k-1}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P'(X) \end{array}$$

bezüglich der gleichen Basis für $\mathbb{Q}_k[X]$ schreiben. Nun finde bezüglich dieser Basis die darstellende Matrix $M(N_k) \in \mathbb{Q}^{(k+2)\times(k+1)}$ der linearen Abbildung: "multipliziere mit X":

$$N_k: \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{Q}_k[X] & \longrightarrow & \mathbb{Q}_{k+1}[X] \\ P(X) & \longmapsto & X \cdot P(X)\ . \end{array}$$

c) Multipliziere: $M(N_2){\cdot}M(L_3)$ und $M(L_4){\cdot}M(N_3)$. Interpretiere die Gleichung:

$$M(L_4){\cdot}M(N_3) - M(N_2){\cdot}M(L_3) = I$$

für die zugehörigen Abbildungsverkettungen.

Aufgabe 22.2 (Differentialgleichungen 1. Ordnung) (T)

a) Falls $\dot{x}(t) = \lambda x(t)$, zeige dass: $\dfrac{d}{dt}\big(e^{-\lambda t}x(t)\big) = 0$. Folgere daraus, dass $e^{-\lambda t}x(t) = C$, eine beliebige Konstante, gilt und dass so $x(t) = Ce^{\lambda t}$.

b) Betrachte nun: $\dot{x}(t) = \lambda x(t) + Ke^{\lambda t}$, wobei K eine Konstante ist. Zeige dass: $\dfrac{d}{dt}\big(e^{-\lambda t}x(t) - Kt\big) = 0$ und folgere daraus, dass: $x(t) = (C + Kt)e^{\lambda t}$ gilt.

Aufgabe 22.3 (Jordan-Basis) (4 Punkte)

Sei $V_n(\lambda)$ der Vektorraum aller Funktionen der Form $P(t)\exp(\lambda t)$, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $P(t)$ eine Polynomfunktion vom Grade $\leq n-1$ ist. Betrachte die Basiselemente:

$$e_{i+1} = \frac{t^i}{i!}\exp(\lambda t) \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, n{-}1 \; .$$

Finde die darstellende Matrix der Differentiationsabbildung $L := \dfrac{d}{dt} \in \mathrm{End}\,(V_n(\lambda))$ bezüglich dieser Basis. Diese heißt eine Jordanmatrix und die Funktionen $\left(\dfrac{t^i}{i!}\exp(\lambda t)\right)$ bilden eine Jordan-Basis für die Abbildung L in dem Vektorraum $V_n(\lambda)$.

Aufgabe 22.4 (Differentialgleichungen 2. Ordnung) (5 Punkte)

Betrachte die Differentialgleichung: $P(\frac{d}{dt})x(t) := \ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = 0$. Zeige: Wenn wir $x_1(t) := x(t)$ und $x_2(t) := \dot{x}(t)$ schreiben, dann erhalten wir das entsprechende System:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -bx_1(t) - ax_2(t) \, . \end{aligned}$$

Zeige durch direkte Rechnung, dass die Eigenwerte der Matrix: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$ die Wurzeln des Polynoms $P(\lambda)$ sind.

Finde nun die allgemeinen Lösungen folgender Gleichungen:

i) $\ddot{y} + 3\dot{y} - 4y = 0$, ii) $\ddot{y} + 6\dot{y} + 9y = 0$.

Aufgabe 22.5 (Polynome und Endomorphismen) (5 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, $E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ eine Basis und L der Endomorphismus von V, der bezüglich der Basis E wie folgt dargestellt wird:

$$L = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad , \; \lambda \in \mathbb{Q} \, .$$

a) Sei $N = L - \lambda I$. Berechne N^2, N^3, N^4, N^5 und N^{10}.

b) Bemerke, dass N und λI kommutieren. Benutze a), um L^2, L^3, L^4, L^5 und L^{10} zu berechnen (vgl. Aufgabe 17.7).

c) Gib eine Formel fur L^n für alle n ≥ 1.

Aufgabe 22.6 (Basistransformation) (T)

Betrachte die Matrix D_α von Aufgabe 19.4, die eine Drehung der Standardbasisvektoren $A = (e_1, e_2)$ von $\mathbb{R}^2$ beschreibt. Wähle nun $B = \left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ als weitere geordntete Basen von $\mathbb{R}^2$. Berechne die Rotationsmatrix in diesen beiden Basen.

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Lineare Algebra und analytische Geometrie

SoSe 2011 Blatt 23 (Aufgaben 23.1 - 23.6)
Abgabe in den Übungen: 31.05./1.06.2011

Aufgabe 23.1 (Differentialgleichungssystem 1. Ordnung I) (6 Punkte)
Betrachte die Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} .$$

Finde die allgemeine Lösung in der Form $\mathbf{x}(t) = \gamma_1(t)\mathbf{u}_1 + \gamma_2(t)\mathbf{u}_2 + \gamma_3(t)\mathbf{u}_3$, wobei $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ eine Basis der Eigenvektoren der obigen Matrix bilden.
Finde die spezielle Lösung mit der Anfangsbedingung: $\mathbf{x}(0) = (0, 1, 0)^T$.

Aufgabe 23.2 (Differentialgleichungssystem 1. Ordnung II) (T)
Betrachte die Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} .$$

Finde die allgemeine Lösung in der Form $\mathbf{x}(t) = \gamma_1(t)\mathbf{u}_1 + \gamma_2(t)\mathbf{u}_2 + \gamma_3(t)\mathbf{u}_3$, wobei $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ eine Basis der Eigenvektoren der obigen Matrix bilden.
Finde die spezielle Lösung mit der Anfangsbedingung: $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 0)^T$.

Aufgabe 23.3 (Harmonischer Oszillator) (4 Punkte)
Die Differentialgleichung der harmonischen Schwingungen

$$-f'' = \lambda f$$

mit $f\colon [0, a] \to \mathbb{R}$ kann auch verstanden werden als Eigenwertgleichung für den Endomorphismus $L(f) := -f''$ auf den $\mathbb{R}$-Vektorraum:

$$V := \big\{ f\colon [0, a] \to \mathbb{R} \mid f'(0) = f'(a) = 0,\ f \text{ glatt auf } [0, a] \big\}.$$

Prüfe nach, dass L symmetrisch bezüglich des Skalarproduktes $\langle f, g \rangle := \int_0^a f(x)g(x)\,dx$ ist, wobei $f, g \in V$. Für welche $A, B \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ist $f(x) = A\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)$ eine Eigenfunktion von $L \in \mathrm{End}(V)$? Bestimme die zugehörigen Eigenwerte und normalisiere die Eigenfunktionen bezüglich $\|\cdot\| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Aufgabe 23.4 (Eigenwerte) (3 Punkte)

Beweise:

a) Wenn $P(\lambda) = 0$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $P \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ gilt, dann gilt auch $P(\overline{\lambda}) = 0$.

b) Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ hat das charakteristische Polynom χ_A eine reelle Nullstelle.

c) Eine Matrix $A \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{R}) = \{G \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) \mid \det G = 1\}$ hat einen positiven reellen Eigenwert.

Aufgabe 23.5 (Norm) (3 Punkte)

Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die *Maximumnorm* durch:

$$\|x\|_* := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}\,.$$

a) Zeige, dass $\|x\|_*$ eine Norm ist; die Axiome einer Norm also erfüllt sind.

b) Was ist der *Einheitsball* $\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x\|_* < 1\}$? Skizziere diesen für $n = 2$.

c) Zeige, dass gilt: $\|x\|_* \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\|x\|_*$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $\| \cdot \|$ die gewöhnliche Pythagoras-Norm ist. (Tipp: Vergleiche $\|x\|_*^2$ mit $\|x\|^2$.)

Aufgabe 23.6 (Diagonalisieren von symmetrischen Matrizen) (4 Punkte)

Betrachte für $x \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A(x) := \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{pmatrix}\,.$$

a) Zeige, dass die ersten 3 Spalten von $A(x)$ linear unabhängig für jedes x sind. Folgere, dass die Matrix $A(x)$ den Rang ≥ 3 hat.

b) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, so dass die Matrix $A(x)$ genau den Rang $= 3$ hat.

c) Bestimme die Eigenvektoren der Matrix $A(2)$. (Tipp: Teil b)).