Seminar: Spezielle Themen der Analysis
Dozent: Prof. Dr. C. Devchand
Referent: Hans - J. von Feilitzsch
Thema: Mittelwerte und ihre Ungleichungen

1 Sechs verschiedene Mittelwerte

Seien a und b zwei positive reelle Zahlen mit 0 < a < b. Dann sind folgende Mittelwerte definiert durch[1]:

- Das Arithmetische Mittel: $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$
- Das Geometrische Mittel: $G(a,b) = \sqrt{a \cdot b}$
- Das Harmonische Mittel: $H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$
- Das Heronische Mittel: $N(a,b) = \frac{a+\sqrt{ab}+b}{3}$
- Das Schwerpunktmittel: $T(a,b) = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$
- Das Logarithmische Mittel: $L(a,b) = \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$

Berechnet man für zwei verschiedene Zahlen a und b obige Mittelwerte und ordnet sie der Größe nach, so stellt man fest:

$$H(a,b) \leq G(a,b) \leq L(a,b) \leq N(a,b) \leq A(a,b) \leq T(a,b)$$

Die Gleichheit gilt dabei genau dann, wenn a = b ist.

2 Integraldarstellung der Mittelwerte

Hongwei Chen hat herausgefunden, dass sich alle diese 6 verschiedenen Mittelwerte durch dieselbe Funktion f(t) darstellen lassen:

$$f(t) = \frac{\int_a^b x^{t+1} dx}{\int_a^b x^t dx}$$

So ist zum Beispiel für t=0 $\rightarrow$ f(0)=A(a,b), denn:

$$f(0) = \frac{\int_a^b x dx}{\int_a^b 1 dx} = \frac{[\frac{1}{2} \cdot x^2]_a^b}{[x]_a^b} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (b^2 - a^2)}{b-a} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (b-a)(b+a)}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

Außerdem gilt:

$$f(-3) = H(a,b);\ f(-3/2) = G(a,b);\ f(-1) = L(a,b);\ f(-1/2) = N(a,b);\ f(0) = A(a,b);\ f(1) = T(a,b)$$

Man beachte, dass die t von links nach rechts wachsen. Könnte man nun zeigen, dass die Funktion f(t) (streng) monoton wächst, so hätte man mit **einem Beweis gleich ALLE** Ungleichungen zwischen den Mittelwerten bewiesen – und genau dies war die Idee von H. Chen.

[1] Zur Geometrischen Deutung dieser Mittelwerte siehe Literatur [2]

Beweis:
Für $t_1 \leq t_2$ ist $f(t_1) \leq f(t_2) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ für alle x $\in R$.

$f(t) = \frac{u(t)}{v(t)} \rightarrow f'(t) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ mit $u(t) = x^{t+1} = e^{(t+1) \cdot \ln x} \rightarrow u'(t) = x^{t+1} \cdot \ln x$

Für f'(t) ergibt sich also:

$$f'(t) = \frac{\int_a^b x^{t+1} \ln x \ dx \int_a^b x^t \ dx - \int_a^b x^{t+1} \ dx \int_a^b x^t \ln x \ dx}{(\int_a^b x^t \ dx)^2}$$

Der Nenner ist immer größer als Null. Daher müssen wir nur noch zeigen, dass der Zähler (=A) ebenfalls größer als Null ist. Dazu substituiert man die Integrationsvariablen (1) der "inneren Integrale" und anschließend (2) der "äußeren Integral" des Zählers und fasst diese jeweils zusammen. Man erhält:

1. $A = \int_a^b x^{t+1} \ln x \ dx \int_a^b y^t \ dy - \int_a^b y^{t+1} \ dy \int_a^b x^t \ln x \ dx = \int_a^b \int_a^b x^t y^t \ln x (x - y) \ dxdy$
2. $A = \int_a^b y^{t+1} \ln y \ dy \int_a^b x^t \ dx - \int_a^b x^{t+1} \ dx \int_a^b y^t \ln y \ dy = \int_a^b \int_a^b x^t y^t \ln y (y - x) \ dxdy$

Mittelt man diese beiden Darstellungen, so erhält man:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(\int_a^b \int_a^b x^t y^t (x - y)(\ln x - \ln y) \ dxdy \right)$$

Diese Zählerfunktion ist größer als Null für $0 < a < b$. Das heißt, dass die Funktion f'(t) immer größer als Null ist und f(t) streng monoton wächst. Es gilt also:

$$f(-3) \leq f(-3/2) \leq f(-1) \leq f(-1/2) \leq f(0) \leq f(1)$$

Die Ungleichungen zwischen den verschiedenen Mittelwerten wurden auf diese Weise **ALLE** nachgewiesen.

3 Verallgemeinerte Mittelwerte

Mittelwerte für n positive Zahlen:

1. Harmonisches Mittel $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}$
2. Geometrisches Mittel $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$
3. Arithmetisches Mittel $A_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n}$

Auch in diesem allgemeinen Fall kann man beweisen, dass folgende Ungleichungen gelten:

$$H_n \leq G_n \leq A_n$$

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

Betrachten wir zunächst die rechte Ungleichung und stellen sie wie folgt um:

$$a_1 \cdot \ \dots \ \cdot a_n \leq \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \right)^n$$

Man kann diesen Satz mit Hilfe der vollständigen Induktion beweisen. Dazu zeigt man, dass die Ungleichung für n=1 und n=2 gilt. Anschließend beweist man, dass aus P(n) die Aussage P(n-1) folgt (Beweisschritt A) und dass aus P(n) und P(2), P(2n) folgt (Beweisschritt B). Aus Beweisschritt A und B folgt dann das vollständige Resultat. (Hinweis: Wähle für $a_n = A = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{n-1}$ das arithmetische Mittel der ersten n-1 Glieder.) Die linke Ungleichung beweist man analog und setzt für A das harmonische Mittel der ersten n-1 Glieder ein.

4 Die Cauchy-Schwarz'sche-Ungleichung

Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung ist wohl eine der berühmtesten Ungleichungen in der Mathematik: *Sei $\langle a, b \rangle$ ein inneres Produkt auf einem rellen Vektorraum V mit der Norm $|a|^2 := \langle a, a \rangle$. Dann gilt:*

$$\langle a, b \rangle^2 \leq |a|^2 |b|^2$$

für alle Vektoren $a, b \in V$, wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn a und b linear abhängig sind.

Beweis:

Man kann leicht zeigen, dass diese Ungleichung für linear abhängige Vektoren gilt. Dazu setzt man $b = \lambda a$ für $a \neq 0$ und rechnet es durch.

Der Beweis für linear unabhängige a und b nutzt die Lösung quadratischer Gleichungen: Man betrachte die quadratische Funktion in $x \in R$:

$$f(x) = |xa + b|^2 = x^2 |a|^2 + 2\langle a, b \rangle x + |b|^2$$

Da $|xa + b|^2 > 0$ für alle $x \in R$, folgt, dass die quadratische Funktion keine oder nur eine Nullstelle haben kann. Daher muss die Diskriminante $D \leq 0$ sein. Berechnet man die Nullstellen dieser Gleichung, so stellt man fest, dass $D = \langle a, b \rangle - |a|^2 |b|^2$. Daraus folgt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung $\langle a, b \rangle \leq |a|^2 |b|^2$.

5 Eine Anwendung der Ungleichung

Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung findet in etlichen Bereichen der Mathematik Anwendung. Auch im Beweis von folgendem Satz wird sie herangezogen.

Satz: *Sei f(x) ein Polynom mit nur reellen Nullstellen gegeben durch: $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, dann liegen diese Nullstellen im Intervall:*

$$I = [I_1, I_2] \ mit \ I_{1/2} = -\frac{a_{n-1}}{n} \pm \frac{n-1}{n} \sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1} \cdot a_{n-2}}$$

Beweis:

Sei y eine beliebige Nullstelle des Polynoms f(x) vom Grade n und $y_1, \ldots, y_{n-1}$ die restlichen n-1 Nullstellen, so ist das Polynom gegeben durch: $f(x) = (x - y)(x - y_1) \ldots (x - y_{n-1})$. Für die Koeffizienten a_{n-1} und a_{n-2} gelten:

$$-a_{n-1} = y + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}$$

$$a_{n-2} = y(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + \sum_{i<j} y_i y_j$$

Quadriert man $-a_{n-1}$ so erhält man:

$$a_{n-1}^2 = y^2 + 2y(y_1 \cdots y_{n-1}) + (y_1 + \ldots y_{n-1})^2 \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow a_{n-1}^2 = y^2 + 2y(y_1 \cdots y_{n-1}) + 2\sum_{i<j} y_i y_j + \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2$$

Die inneren beiden Summanden bilden gerade $2a_{n-2}$. Auf diese Weise ergibt sich folgende Gleichung:

$$a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y^2 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 \tag{2}$$

Wendet man die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung auf die Vektoren $u = (1, \ldots, 1)$ und $v = (y_1, \ldots, y_{n-1})$, so stellt man fest:

$$(y_1 + \ldots y_{n-1})^2 = \langle u, v\rangle^2 \ \leq\ |u|^2|v|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2\right) \cdot (1^2 + \ldots + 1^2) = (n-1)(y_1^2 + \ldots y_{n-1}^2)$$

Also gilt: $(y_1 + \ldots y_{n-1})^2 \leq (n-1)(y_1^2 + \ldots y_{n-1}^2)$. Wir wenden auf der linken Seite die Formel (1) und auf der rechten Seite Formel (2) an und erhalten:

$$a_{n-1}^2 - y^2 - 2y(y_1 \cdots y_{n-1}) \leq (n-1)(a_{n-1}^2 - y^2 - 2a_{n-2})$$

Addiert man auf der linken Seite die "nahrhafte Null" $(+2y^2 - 2y^2)$, klammert anschließend -2y aus und wendet die binomische Formel an, so erhält man: $(a_{n-1} + y)^2 \leq (n-1)(a_{n-1}^2 - y^2 - 2a_{n-2})$

$$\Leftrightarrow y^2 + \frac{2a_{n-1}}{n} y - \frac{n-2}{n} a_{n-1}^2 + \frac{2(n-1)}{n} a_{n-2} \ \leq\ 0.$$

Unsere Nullstelle y liegt also zwischen den beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung. Die Lösungen sind dabei die Schranken des Intervalls. Da y eine beliebige Nullstelle war, liegen alle Nullstellen innerhalb dieses Intervalls.

6 Literatur

1. H. Chen: Means Generated by an Integral. In: Mathematics Magazine, Vol. 78, Nr. 5 (Dez. 2005), S. 397-399.

2. H. Eves: Means Appearing in Geometric Figures. In: Mathematics Magazine, Vol. 76, Nr. 4 (Okt. 2003), S. 292-294.

3. M. Aigner, G.M. Ziegler: Das Buch der Beweise. Berlin 2002.