Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

# Aufbaumodul II Analysis
## SoSe 2010 Blatt 9 (Aufgaben 9.1 - 9.3)

Abgabe in den Übungen am 25.06.2010

---

### Aufgabe 9.1 (Mengen vom Cantorschen Typ)

Wir gehen vom kompakten Intervall $I = [0, 1]$ aus und nehmen aus diesem nacheinander offene Intervalle heraus. Zunächst wird ein in der Mitte gelegenes Teilintervall $I_{11}$ herausgenommen, dann aus jedem der beiden Reste ein Mittelstück $I_{21}$ bzw. $I_{22}$, darauf aus jedem der verbleibenden vier Reste ein Mittelstück $I_{31}, I_{32}, I_{33}, I_{34}$ usw. Die Vereinigung $U$ aller $I_{ij}, i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, 2^{i-1}$, ist offen. Die kompakte Restmenge $C = I/U$ wird als *Menge vom Cantorschen Typ* bezeichnet.

Sei $0 < \alpha \leq 1/3$. Wähle $\lambda_1(I_{ij}) = \alpha^i$ für $j = 1, 2, \dots, 2^{i-1}$ und bezeichne die erhaltenen Mengen $U_\alpha$ bzw. $C_\alpha$. Der Wert $\alpha = 1/3$ entspricht dem Cantorschen Diskontinuum.

a) Zeige, dass die Mengen $C_\alpha$ nirgends dicht sind (d.h. jedes Intervall ein zu $C_\alpha$ disjunktes Intervall enthält).

b) Zeige: $\lambda_1(C_\alpha) = \dfrac{1-3\alpha}{1-2\alpha}$.

Es gibt also abgeschlossene Mengen mit leerem Inneren, aber postivem Maß.

(10 Punkte)

### Aufgabe 9.2 (Legendre-Polynome)

Die Legendre-Polynome $P_n(z)$, $z \in \mathbb{C}$, sind definiert durch

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \left[ (z^2 - 1)^n \right]. \tag{1}$$

a) Zeige mit Cauchys Integralformel, dass:

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{2^n (\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta ,$$

wobei $C$ ein einfach geschlossener Weg um $z$ ist.

b) Zeige, wenn $C$ der Kreis vom Radius $\sqrt{|z^2 - 1|}$ mit Mittelpunkt $z$ ist, dass

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \cos\theta \right)^n d\theta .$$

Zeige, dass diese Formel zu denselben $P_1(z)$ und $P_2(z)$ führt, die aus Gl.(1) folgen.

(5 Punkte)

### Aufgabe 9.3 (Residuen)

Finde die Pole und Residuen der folgenden Funktionen:

a) $\dfrac{1}{(z^2 - 7z + 12)}$, b) $\dfrac{2z}{z^2 - 3z - 4}$, c) $\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$, d) $\dfrac{\cos z}{z^3}$, e) $\dfrac{1}{z^3 - 1}$.

(5 Punkte)