Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Aufbaumodul II Analysis
SoSe 2010 Blatt 8 (Aufgaben 8.1 - 8.2)

Abgabe in den Übungen am 18.06.2010

Aufgabe 8.1 (Das Cantorsche Diskontinuum)

Wir konstruieren eine Menge C wie folgt: Wir nehmen aus dem Einheitsintervall das offene Intervall $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ heraus. Es entsteht die Menge

$$C_1 := [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1].$$

Jetzt nehmen wir wieder aus jedem Teilintervall das mittlere offene Drittel heraus; es entsteht

$$C_2 := [0, \tfrac{1}{9}\,] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1].$$

Wir wiederholen diesen Prozess ad infinitum und setzen induktiv

$$C_m := \tfrac{1}{3}C_{m-1} \cup \{\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}C_{m-1}\}.$$

Jetzt definieren wir das Cantorsche Diskontinuum $C := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} C_m$. Zeige:

a) $C \neq \emptyset$ (abzählbar viele Punkte in C sind leicht anzugeben).

b) C ist abgeschlossen in $[0,1]$, also ist kompakt.

c) C ist nirgends dicht in $[0,1]$, d.h. C enthält keine in $[0,1]$ offene Menge.

d) C ist überabzählbar. Sei dazu X die Menge aller Folgen $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k = 0$ oder $a_k = 2$. Definiere eine bijektive Abbildung $X \to C$.
(Tipp zum Majorisieren: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = 1$) (10 Punkte)

Aufgabe 8.2 (σ-Algebren)

a) Zeige: Ist $\{\mathcal{A}_i\}$ ein beliebiges System von σ-Algebren auf X, so ist auch $\mathcal{A} = \bigcap_i \mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra auf X .

b) Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ein beliebiges, nichtleeres Mengensystem. Zeige, dass:

$$\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{E} \subset \mathcal{A} \\ \mathcal{A}\ \sigma-\text{Algebra}}} \mathcal{A}$$

die kleinste σ-Algebra auf X ist, die $\mathcal{E}$ enthält. Sie heißt, die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra.

c) Es seien:
$\mathcal{E}_0$ Menge aller offenen Quader in $\mathbb{R}^n$,
$\mathcal{E}_1$ Menge aller offenen Kugeln in $\mathbb{R}^n$,
$\mathcal{E}_2$ Menge aller offenen Teilmengen in $\mathbb{R}^n$.
Zeige: $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_0) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_1) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_2) =: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$.

(10 Punkte)