Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Aufbaumodul II Analysis
SoSe 2010 Blatt 7 (Aufgaben 7.1 - 7.3)

Abgabe in den Übungen am 11.06.2010

Aufgabe 7.1 (Integrale über Wege)

a) Berechne das Integral der Funktion $f(z) = e^z$ von $z = -3$ bis $z = 3$ über einen Halbkreis. Vergleiche dies mit dem Integral über den direkten, geraden Weg zwischen den beiden Punkten.

b) Skizziere die folgenden Kurven für $0 \leq t \leq 1$.

$$\begin{array}{rrcl@{\qquad}rrcl} i) & y(t) & = & 1+it & ii) & y(t) & = & e^{-\pi it} \\ iii) & y(t) & = & e^{\pi it} & iv) & y(t) & = & 1+it+t^2 \end{array}$$

c) Integriere jede der folgenden Funktionen über jede der Kurven in b).

$$i) \quad f(z) \;=\; z^3 \qquad ii) \quad f(z) \;= \overline{z} \qquad ii) \quad f(z) \;=\; 1/z$$

d) Sei σ ein vertikales Intervall, parametrisiert durch: $[-1,1] \ni t \mapsto \sigma(t) = z_0 + itc$, wobei z_0 eine feste, komplexe Zahl und c eine feste, reelle Zahl > 0 ist.
(Zeichne eine Skizze.)

Sei $\alpha = z_0 + x$ und $\alpha' = z_0 - x$, wobei $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Finde den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \int_\sigma \left(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\alpha'} \right) dz \,.$$

[Die Antwort lautet nicht 0!] (16 Punkte)

Aufgabe 7.2 (Wechsel von Variablen)

Sei $\quad F(t) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}\, dx \,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$

Zeige mit dem in der Vorlesung berechneten Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$
und mit dem Variablenwechsel, dass:

$$F(t) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad t < 0\,, \qquad F(0) = 0\,, \qquad F(t) = \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad t > 0\,.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 7.3 (m-faches Integral des Logarithmus)

Betrachte die geschlitzte Ebene $U := \mathbb{C} \backslash \{z \in \mathbb{C} \mid z \in \mathbb{R}\,, z \leq 0\}$. Definiere für eine ganze Zahl $m \geq 1$

$$L_{-m}(z) = \left(\log z - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \right) \right) \frac{z^m}{m!}\,.$$

Zeige, dass $L'_{-m}(z) = L_{-m+1}(z)$ und $L'_{-1}(z) = \log z$. So ist L_{-m} ein m-faches Integral des Logarithmus. (2 Punkte)