Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Aufbaumodul II Analysis
SoSe 2010 Blatt 6 (Aufgaben 6.1 - 6.4)

Abgabe in den Übungen am 4.06.2010

Aufgabe 6.1 (Komplexes Kurvenintegral)

Bestimme folgende Integrale:

$$\text{a)} \int_C \frac{1}{|z|}\, dz\,, \qquad \text{b)} \int_C \frac{1}{|z|^{2009}}\, dz\,, \qquad \text{c)} \int_C e^{-z^2} dz\,, \qquad \text{d)} \int_C \overline{z}^n\, dz\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

wobei C der Einheitskreis um den Ursprung ist. (4 Punkte)

Aufgabe 6.2 (Wegabhängigkeit des komplexen Kurvenintegrals)

Ist $|z|\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph? Berechne das komplexe Kurvenintegral $\int_C |z|\, dz$ für folgende Wege von -1 nach 1:

a) entlang der rellen Achse,

b) entlang dem oberen Halbkreis. (4 Punkte)

Aufgabe 6.3 (Wegunabhängigkeit des komplexen Kurvenintegrals)

Integriere $f(z) = z^n\,,\ n \in \mathbb{N}$, über folgende Wege von -1 nach 1:

a) entlang der reellen Achse,

b) entlang der Kurve mit Parameterdarstellung $c_1 : [0,1] \to \mathbb{C}\,;\ c_1(t) = 2t - 1\,,$

c) entlang dem unteren Halbkreis $c_2 : [0,1] \to \mathbb{C}\,;\ c_2(t) = e^{i\pi(t-1)}\,.$ (5 Punkte)

Aufgabe 6.4 (Fouriertransformierte der Gaußfunktion)

Bekannterweise ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi}\ .$

Integriere $e^{-z^2}\ ,\ z \in \mathbb{C}$, um ein Viereck, dessen Seiten wie folgt gegeben sind:
$x = R\,,\quad x = -R\,,\quad y = 0\,,\quad y = a/2\,.$
Betrachte den Limes $R \to \infty$, um zu zeigen, dass

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos ax\ dx = \tfrac{1}{2} e^{-a^2/4} \sqrt{\pi}\ .$$

(7 Punkte)