Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Aufbaumodul II Analysis
SoSe 2010 Blatt 5 (Aufgaben 5.1 - 5.2)

Abgabe in den Übungen am 28.5.2010

Aufgabe 5.1 (Analytische Funktionen)

a) Finde die Terme der Ordnung ≤ 3 der Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(z) = z^2/(z-2)$ um $z = 1$.

b) Finde die Terme der Ordnung ≤ 3 der Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(z) = (z-2)/(z+3)(z+2)$ um $z = 1$.

(4 Punkte)

Aufgabe 5.2 (Obere Halbebene)

Betrachte $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) := \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}\,,\ ad-bc > 0 \right\}$.

Warum ist $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ eine Gruppe?

Für $z \in H := \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} z > 0\}$, die obere Halbebene, definiere $f_M(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$.

Zeige, dass

a) $\operatorname{Im} f_M(z) = \dfrac{(ad-bc)y}{|cz+d|^2}$.

b) f_M bildet H in H ab.

c) Für $M, M' \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ gilt: $f_{MM'} = f_M \circ f_{M'}$.
Prüfe nach, dass $f_I = \mathrm{id}$ und $f_{M^{-1}} = (f_M)^{-1}$, wobei I die Identitätsmatrix ist.
Damit ist f_M ein Automorphismus von H.

d) Für $c \in \mathbb{R}$ gilt: $f_{cM} = f_M$.
So läßt sich für jede $M \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ ein $c > 0$ finden, damit $cM \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$. Somit reicht für die Untersuchung analytischer Automorphismen von H die Betrachtung von nur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

e) Falls $f_M = f_{M'}$ für $M, M' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, dann gilt: $M' = \pm M$.

f) Für jede $z = x + iy \in H$ gibt es ein $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, so dass $f_M(i) = z$.

g) Für beliebige $z_1, z_2 \in H$ gibt es ein $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, so dass $f_M(z_1) = z_2$.
Wir sagen, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *transitiv* wirkt.

f) Falls $M \in K := \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) | f_M(i) = i\}$, dann gibt es ein $\theta \in \mathbb{R}$, so dass:
$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(16 Punkte)