Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Aufbaumodul II Analysis
SoSe 2010 Blatt 4 (Aufgaben 4.1 - 4.4)

Abgabe in den Übungen am 21.5.2010

Aufgabe 4.1 (Algebraische Gleichungen)

Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$, welche die folgenden Gleichungen lösen:

a) $z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0$ b) $z^3 = \dfrac{6i - 10}{4 + i}$ c) $z^3 + \overline{z} = 0$.

[Es gibt: a) 3, b) 3 und c) 5 Lösungen.] (4 Punkte)

Aufgabe 4.2 (Möbiustransformation)

a) Finde die Möbiustransformation $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$, für die gilt:

$$f(0) = -2,\ f(2) = 0,\ f(i) = \infty,\ f(\infty) = -i\,.$$

b) Zeige, dass deren Umkehrabbildung durch die Möbiustransformation $f^{-1}(z) = \dfrac{z + 2}{-iz + 1}$ gegeben ist.

c) Bestimme die zwei Fixpunkte von f, also alle $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = z$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.3 (Konforme Abbildung)

Gegeben sei eine Abbildung

$$\eta : \mathbb{C}\backslash\{-i\} \to \mathbb{C}\backslash\{1\}\ , \quad \eta(z) := \frac{z - i}{z + i}\ .$$

Sei $H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ und $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}x$. Zeige mit folgenden Schritten, dass η eine holomorphe Abbildung von der oberen Halbebene H in die offene Kreisscheibe D ist.

a) Zeige: η ist holomorph und $\eta(H) \subset D$.

b) Berechne die Inverse $z = \zeta(w)$ zu $w = \eta(z)$ für $w \neq 1$.

c) Zeige für $w \in D$: $2\operatorname{Im}(\zeta(w)) > 0$, sodass mit a) folgt: $\eta(H) = D$.

(6 Punkte)

Aufgabe 4.4 (Abbildung von Geraden in Kreisen)

Zeige, dass die Transformation $z \mapsto w = \dfrac{1 + e^z}{1 - e^z}$ der Geraden x = konstant bzw. y = konstant Kreise ergibt.

[Tipp: Drücke e^z als Funktion von w aus.] (6 Punkte)