Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Aufbaumodul II Analysis
SoSe 2010 Blatt 3 (Aufgaben 3.1 - 3.4)

Abgabe in den Übungen am 14.5.2010

Aufgabe 3.1 (Holomorphe Funktionen)

Zeige, dass die Funktionen $z^2, e^z, \sin z$ überall in $\mathbb{C}$ holomorph sind.
Schreibe $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, wobei u und v reelle Funktionen von x und y sind; und prüfe nach, dass $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$. (3 Punkte)

Aufgabe 3.2 (Cauchy-Riemann Gleichungen)

Prüfe mit Hilfe der Cauchy–Riemann Gleichungen, welche der folgenden Funktionen holomorph sind. Stelle alle diese Funktionen mittels $z = x+iy$ und $\overline{z} = x-iy$ dar:

a) $x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$,

b) $x^3 - 3xy^2 - i(3x^2y - y^3)$,

c) $\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$,

d) $x^2 + y^2 + ix(2y - x)$. (8 Punkte)

Aufgabe 3.3 (Orthogonale Kurvensysteme)

Löse die Cauchy-Riemann Gleichungen, um zu den folgenden Kurvensystemen ($c \in \mathbb{R}$) die orthogonalen Kurvensysteme $v(x,y) = a$, $a \in \mathbb{R}$, zu finden:

a) $u(x,y) = \cos x \cosh y = c$,

b) $u(x,y) = y(2x - 3) = c$,

c) $u(x,y) = e^x(x \cos y - y \sin y) = c$. (3 Punkte)

Aufgabe 3.4 (Konforme Transformationen)

a) Zeige, dass die Transformation $z \mapsto w = \cosh z$ die Geraden x = konstant, y = konstant in der z-Ebene in Ellipsen bzw. Hyperbeln in der w-Ebene transformiert.

(Hinweis: Schreibe w als $u+iv$, um die Funktionen u und v zu bestimmen; eliminiere y bzw. x, um Gleichungen für die Ellipsen und Hyperbeln zu erhalten.)

b) Zeige, dass die Transformation $w = z + z^{-1}$ die Kreise $x^2 + y^2 = a^2$ in der z-Ebene in die Ellipsen $\frac{u^2}{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2} = 1$ in der w-Ebene umwandelt.

(6 Punkte)