Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Aufbaumodul II Analysis
SoSe 2010 Blatt 2 (Aufgaben 2.1 - 2.4)

Abgabe in den Übungen am 7.5.2010

Aufgabe 2.1 (Komplexe Multiplikation)

Betrachte die Abbildung $f_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ ;\ z \mapsto w{\cdot}z$, für $w \neq 0$ fest, von Aufgabe 1.1

a) Zeige: f_w ist $\mathbb{C}$-linear.

b) Identifiziere $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ durch $z = x + iy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Sei $w = a + ib$. Gib die reelle 2×2 Matrix $M(f_w)$ an, die f_w darstellt.

c) Für welche $w \in \mathbb{C}$ ist $M(f_w) \in \mathrm{SO}(2)$?

(4 Punkte)

Aufgabe 2.2 (Geometrische Reihe I)

Die Summenformel der geometrischen Reihe für $z \in \mathbb{C}$ sei bekannt:

$$1 + z + z^2 + \ldots z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}\ .$$

a) In welchem Bereich von $\mathbb{C}$ muß z liegen, damit die *unendliche* Reihe konvergiert?

b) Falls z in diesem Bereich liegt, gegen welchen Punkt in der Ebene konvergiert dann diese unendliche Reihe?

c) In der Vorlesung wurde die Konvergenz der exponentialen Reihe bildlich dargestellt. Zeichne analog ein möglichst genaues Bild der unendlich geometrischen Reihe für $z = \frac{1}{2}(1 + i)$ und überprüfe, dass sie in der Tat gegen den in b) ermittelten Punkt konvergiert.

(6 Punkte)

Aufgabe 2.3 (Geometrische Reihe II)

a) Zeige mit Aufgabe 2.2, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ik\phi}}{2^k}\ ,$$

für ein festes $\phi \in \mathbb{R}$, konvergiert und berechne den Grenzwert.

b) Benutze das Resultat, um zu zeigen, dass die reelle Reihe

$$S := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\phi)}{2^k}$$

den Grenzwert $S = \dfrac{4 - 2\cos\phi}{5 - 4\cos\phi}$ hat.

c) Skizziere die 2π-periodische Funktion

$$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \; ; \; \phi \mapsto f(\phi) = \frac{4 - 2\cos\phi}{5 - 4\cos\phi} \; .$$

Bemerkung: Die Reihe S ist die Fourier-Reihe von f. (6 Punkte)

Aufgabe 2.4 (Trigonometrische Funktionen)

a) Betrachte $(a + ib)(\cos\theta + i\sin\theta)$ und zeige:

$$b\cos\theta + a\sin\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\; \sin\left[\theta + \tan^{-1}(b/a)\right] \; .$$

b) Benutze dieses Ergebnis, um mit vollständiger Induktion zu zeigen:

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[e^{at}\sin bt\right] = (a^2 + b^2)^{n/2} e^{at} \sin\left[bt + n\tan^{-1}(b/a)\right] \; .$$

(4 Punkte)