Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Aufbaumodul II Analysis
SoSe 2010 Blatt 13 (Aufgaben 13.1 - 13.4)

Aufgaben zum Selbststudium

Aufgabe 13.1 (Poisson-Kern)

Für $0 < r < 1$ führen wir den Poisson-Kern ein

$$P_r(\phi) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\phi = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\phi + r^2}\,.$$

a) Beweise die Ungleichung $r^2+(1-2r)\cos\phi \geq 0$ für $0 \leq \phi \leq \pi$ und $1/2 \leq r \leq 1$.
Zeige, dass
$$\phi^2 P_r(\phi) \leq \frac{(1-r^2)\phi^2}{1-\cos\phi}$$
und berechne
$$\lim_{r\to 1}\int_0^{\pi} \phi^2 P_r(\phi)\,d\phi\ .$$

b) Zeige, dass
$$\int_0^{\pi} \phi^2 P_r(\phi)\,d\phi = \frac{\pi^3}{3} + 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-r)^n}{n^2}\,.$$

c) Benutze (a) und (b), um die Summen der Reihen
$$s_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\,,\quad s_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\,,\quad \text{und}\quad s_3 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$
zu berechnen.

Aufgabe 13.2 (Majorisierte Konvergenz)

Auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{L}, \lambda)$ betrachte $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$. Zeige, dass $f_n \to 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ aber dass

$$\int f_n\,d\lambda = 1 \quad \forall n\,.$$

Widerspricht das dem Satz von Lebesgue?

Aufgabe 13.3 (Satz von Fubini I)
Berechne die Integrale

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy, \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx, \quad \int_{[0,1]^2} |f(x,y)|\, d\lambda$$

für folgende Funktionen $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases} \tag{1}$$

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{x-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{2}$$

Erkläre, warum das Ergebnis dem Satz von Fubini nicht widerspricht.

Aufgabe 13.4 (Satz von Fubini II)
Sei

$$f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeige, dass die beiden iterierten Integrale von f existieren und gleich sind, dass aber f auf $[-1,1]^2$ nicht integrierbar ist.