Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Aufbaumodul II Analysis
SoSe 2010 Blatt 12 (Aufgaben 12.1 - 12.3)

Abgabe in den Übungen am 16.07.2010

Aufgabe 12.1 (Eigenschaften des Integrals)

a) Zeige: $a \leq f(x) \leq b \quad (x \in X)\,,\ \mu(X) < \infty \quad \Longrightarrow \quad a\,\mu(X) \leq \int_X f\ d\mu \leq b\,\mu(X)\,.$

b) Sei f eine integrierbare Funktion. Zeige:

$$\mu\big(\{\,|f| \geq a\,\}\big) \leq \frac{1}{a}\int |f|\ d\mu \quad \text{und damit} \quad \mu\big(\{\,|f| \geq a\,\}\big) = o\left(\frac{1}{a}\right) \ \text{als } a \to \infty\,.$$

c) Sei $f : X \to [0\,,+\infty]$ messbar und $\int f\ d\mu < +\infty$. Zeige: $f < +\infty$ fast überall.

(5 Punkte)

Aufgabe 12.2 (Integration)

Berechne:

a) $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-[x]}\, dx\,;\quad [x]$ ist der ganzzahlige Anteil von x,

b) $\int_{[0,1]} \chi_{\mathbb{Q}}\ dx\,;\quad$ wobei $\chi_{\mathbb{Q}}$ die charakteristische Funktion von $\mathbb{Q}$ ist,

c) $\int_{[0,1]} f(x)\ dx\,;\quad f(x) = \begin{cases} \cos x & , \ \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ \sin x & , \ \text{sonst}\,. \end{cases}$

(5 Punkte)

Aufgabe 12.3 (Majorisierte Konvergenz)

Eines der wichtigsten Resultate der Maßtheorie ist der Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz. In dieser Aufgabe beweisen wir ein analoges Resultat für die Summe anstatt für das Integral. Dieser Beweis ist elementarer (keine Maßtheorie), aber die Strategie ist ähnlich wie für Lebesgues Satz.

Seien $a_n(i)$ reelle Zahlen und für jedes i sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(i) = a(i)\,.$

a) Gib ein solches Beispiel, wobei $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n(i) \neq \sum\limits_{i=1}^{\infty} a(i)$, obwohl die unendlichen Summen absolut konvergieren.

b) Nun seien für jedes n, $\quad |a_n(i)| \leq b(i)$ und $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b(i)$ endlich.

Beweise: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n(i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a(i)\,.$

(10 Punkte)