Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

# Aufbaumodul II Analysis
## SoSe 2010 Blatt 11 (Aufgaben 11.1 - 11.4)

Abgabe in den Übungen am 9.07.2010

---

### Aufgabe 11.1 (Limes superior)

Sei $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge messbarer Mengen, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ .

a) Zeige: Die Menge von Punkten, die zu *unendlich vielen* der $E_n$ gehören, ist gegeben durch $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ . (Die Menge $U$ ist der Limes superior der Folge $(E_n)$ .)

b) Zeige, dass $U$ eine Nullmenge ist. (4 Punkte)

### Aufgabe 11.2 ($\mathcal{A}$-messbare Funktionen)

a) Es seien $X = \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{A} = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\big\}$ .
Charakterisiere alle $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ .

b) Konstruiere eine $\sigma$-Algebra auf [0,1] derart, dass die Funktion $f(x) = x$ nicht $\mathcal{A}$-messbar ist.

c) Zeige, dass eine Funktion $f$ genau dann messbar ist, wenn $\arctan f$ messbar ist.

(4 Punkte)

### Aufgabe 11.3 (Trigonometrische Integrale)

a) Zeige mit dem Residuenkalkül:

$$i)\quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}\ , \qquad ii)\quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5 - 4\cos\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{4}\ .$$

[Schreibe $z = e^{i\theta}$ und integriere um den Einheitskreis.]

b) Benutze die Binomialentwicklung und Cauchys Integralsatz, um das Integral $\int_C (z + 1/z)^{2n}\ \frac{dz}{z}$ zu berechnen und zeige damit dass:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2n}\ d\theta = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\ .$$

(4 Punkte)

**Aufgabe 11.4 (Ein Trick mit dem Kotangens)**

a) Finde die Pole und Residuen von $g(z) := \dfrac{\cot(\pi z)}{z^2}$ .

[Tipp: Das Residuum bei 0 ($-\pi/3$), also der Koeffizient von $1/z$ in der Laurententwicklung, läßt sich am leichtesten mit der Taylorentwicklung für cos und sin berechnen.]

b) Zeige: Ist $f(z)$ holomorph und nicht singulär bei $z = n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$\mathrm{Res}_{z=n}\big(f(z)\cot(\pi z)\big) = \frac{f(n)}{\pi} \ .$$

c) Betrachte das Integral $\int_C g(z)\ dz$, wobei C das ursprungszentrierte Quadrat mit den Eckpunkten $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$ und $N$ eine postive ganze Zahl ist.

Zeige, dass:

$$\frac{1}{2\pi}\int_C g(z)\ dz = -\frac{\pi}{3} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} \ .$$

Betrachte nun die bekannte Ungleichung

$$\left|\int_C g(z)\ dz\right| \leq (\text{Umfang von } C) \times (\sup |g| \text{ auf } C) \ .$$

Zeige für hinreichend große $N$: $\left|\int_C g(z)\ dz\right| < \dfrac{2}{N^2}\ (8N + 4)$

und somit: $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{2\pi}\int_C g(z)\ dz = 0$ . Daraus folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ .$$

d) Argumentiere auf ähnliche Weise, dass für $f(z)$ eine holomorphe Funktion mit $|f(z)| < (\text{const})/|z^2|$ für genügend große $|z|$ gilt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{\text{Pole von } f(z)} \mathrm{Res}\big(f(z)\cot(\pi z)\big) \ .$$

Sollte einer der Pole von $f(z)$ eine ganze Zahl sein, dann verstehen wir die Summe auf der linken Seite so, dass dieser Wert $n$ ausgelassen wird.

Nun zeige, dass:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{w^2 - n^2} = \frac{\pi\cot\pi w}{w} \quad , \ w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \ .$$

Daraus folgt die bemerkenswerte Partialbruchentwicklung des Kotangens:

$$\pi\cot\pi w = \frac{1}{w} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{w+n} + \frac{1}{w-n}\right) \ . \qquad \text{(8 Punkte)}$$

Zur weiteren Bewunderung dieser Formel von Euler wird die Lektüre von Kap. 23 in "Das BUCH der Beweise" von Aigner und Ziegler empfohlen. Der Link zur Online-Ausgabe (freier Zugang aus Uni-Rechnern) steht auf der Webseite im Literaturverzeichnis.