Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Aufbaumodul II Analysis
SoSe 2010 Blatt 10 (Aufgaben 10.1 - 10.4)

Abgabe in den Übungen am 2.07.2010

Aufgabe 10.1 (Schleifenintegrale)

Berechne die folgenden Schleifenintegrale:

a) $\displaystyle\int_C \frac{z^3 - z + 2}{z - 1}\, dz \quad \text{um} \quad x^2 + 2y^2 = 4\ ,$

b) $\displaystyle\int_C \frac{z\ dz}{(z - 2i)^2} \quad \text{um} \quad \text{i)}\ \ x^2 + y^2 = 1\,, \quad \text{ii)}\ \ x^2 + y^2 = 9\ ,$

c) $\displaystyle\int_C \frac{3z^2 - 2z + 1}{(z^2 + 1)(z - 1)}\, dz \quad \text{um} \quad x^2 + y^2 = 4\,,$

d) $\displaystyle\int_C \frac{e^{\frac{\pi z}{2}} dz}{1 + z^2}$ um eine einfach geschlossene Kurve, die die Punkte $z = \pm\, i$ einschließt.

(4 Punkte)

Aufgabe 10.2 (Reelle, uneigentliche Integrale)

Zeige durch Integration einer geeigneten komplexen Funktion um einen großen Halbkreis, dass:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \pi\,,$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,,$ c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a}.$

(6 Punkte)

Aufgabe 10.3 (Äußeres Maß)

a) Zeige, dass es für jedes $\epsilon > 0$ eine abzählbare Sammlung offener Intervalle $U_1, U_2, \ldots, U_n, \cdots \in \mathbb{R}$ gibt, so dass: $\mathbb{Q} \subset \bigcup_n U_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n) = \epsilon\,.$

b) Nun zeige, dass $I \subset \mathbb{R}\,$, die Menge aller irrationalen Zahlen, als disjunkte Vereinigung $I = C \cup S$ dargestellt werden kann, wobei C abgeschlossen ist und das äußere Maß von S die Abschätzung $\mu^*(S) < \frac{1}{10}$ erfüllt.

(5 Punkte)

Aufgabe 10.4 (Messbare Funktionen)

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Maßraum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, wobei $\mathbb{R}$ als Maßraum mit der σ-Algebra der Borel-Mengen zu versehen ist.

Zeige, dass f genau dann messbar ist, wenn $f^{-1}\big((-\infty, a]\big) \in \mathcal{A}$ für alle $a \in \mathbb{R}\,.$

(5 Punkte)