Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Aufbaumodul II Analysis
SoSe 2010 Blatt 1 (Aufgaben 1.1 - 1.2)

Abgabe in den Übungen in der zweiten Semesterwoche

Aufgabe 1.1 (Komplexe Zahlen)

a) Argumentiere, dass die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $z \mapsto w{\cdot}z$ für $w \neq 0$ fest, auf der komplexen Zahlenebene geometrisch eine Drehung um den Winkel $\arg w$ zusammen mit einer Streckung um $|w|$ darstellt.

b) Zeige:

$$(1+i)^4 = -4 \quad , \quad (1+i)^{13} = -2^6(1+i) \quad , \quad (1+i\sqrt{3})^6 = 2^6$$

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^2} = -4i \quad , \quad \frac{(1+i)^5}{(\sqrt{3}+i)^2} = -\sqrt{2}e^{i(-\pi/12)} \ .$$

c) Zeige mit Eulers Formel:

i) $\cos 3\vartheta = 4\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta \quad , \quad \sin 3\vartheta = -4\sin^3\vartheta + 3\sin\vartheta,$

ii) $\cos^4\vartheta = \frac{1}{8}(\cos 4\vartheta + 4\cos 2\vartheta + 3)$.

(8 Punkte)

Aufgabe 1.2 (Geometrie und komplexe Arithmetik)

a) Zeige geometrisch (mit Hilfe einer Skizze), dass

$$\mathrm{Re}(z) = \tfrac{1}{2}(z+\overline{z}) \ , \quad \mathrm{Im}(z) = \tfrac{1}{2i}(z-\overline{z}) \ , \quad \tan(\arg z) = \frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z} \ , \quad z\overline{z} = |z|^2 \ .$$

b) Zeige mit Hilfe des Produktes $(2+i)(3+i)$: $\dfrac{\pi}{4} = \arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3}$.

c) Beweise: Ist $z = e^{i\theta} \neq -1$, so folgt $(z-1) = (i\tan\frac{\theta}{2})(z+1)$;
(i) durch Rechnung, (ii) durch eine Skizze.

d) Zeige:

$$e^{i\theta} + e^{i\phi} = 2\cos\left(\tfrac{\theta-\phi}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\phi}{2}} \quad \text{und} \quad e^{i\theta} - e^{i\phi} = 2i\sin\left(\tfrac{\theta-\phi}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\phi}{2}}$$

(i) durch Rechnung, (ii) durch eine Skizze.

e) Ist c eine feste komplexe Zahl und R eine feste reelle Zahl, so erkläre mit einer Skizze, warum $|z-c| = R$ die Gleichung eines Kreises ist.

f) Genügt z der Gleichung $|z+3-4i| = 2$, so bestimme den minimalen und maximalen Wert von $|z|$ und die dazugehörige Position von z. (Tipp: Skizze!)

g) Sind a, b feste komplexe Zahlen, so zeige anhand eines Bildes, dass $|z-a| = |z-b|$ die Gleichung einer Geraden ist.

(12 Punkte)