Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Aufbaumodul II Analysis
SoSe 2010 Blatt 0 (Aufgaben 0.1 - 0.5)

Wiederholungsaufgaben

Aufgabe 0.1 (Komplexe Zahlen I)

Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$, dann definieren wir die zu z ***komplex konjugierte*** Zahl durch $\bar{z} := a - bi$ und die ***Norm*** von z durch $|z| := \sqrt{\bar{z}z}$.

a) Zeige, dass die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ $\mathbb{R}$–linear ist.

b) Zeige, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt: $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$. Folgere, dass $|zw| = |z|\ |w|$.

c) Zeige, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt: $\quad |z + w| \leq |z| + |w|$
(Mache eine schöne Zeichnung dazu; Dreiecksungleichung!).

d) Geometrische Reihe: Sei $z \in \mathbb{C}$, zeige

$$(1 - z) \cdot \sum_{k=0}^{n} z^k = 1 - z^{n+1} \ ,$$

dass also die gleiche Formel wie für reelle Zahlen gilt.

Aufgabe 0.2 (Komplexe Zahlen II)

a) Zerlege

$$z := \left(\frac{8 - i}{5 + i}\right)^4 \quad , \quad w := \cfrac{1}{i + \cfrac{1}{i + \cfrac{1}{i + 1}}}$$

in Real- und Imaginärteile. (Natürlich darf für Ausdrücke wie $(a - ib)^n$ die binomische Formel angewandt werden).

b) Bringe die folgenden als Produkt von Linearfaktoren gegebenen Polynome auf die Gestalt $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

i) $(x - \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})) \cdot (x - \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}))$

ii) $(x - \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})) \cdot (x - \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}))$

iii) $(x + 1) \cdot (x - \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})) \cdot (x - \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}))$

iv) $(x - \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})) \cdot (x - \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})) \cdot (x + 1) \cdot (x - \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})) \cdot (x - \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}))$.

Aufgabe 0.3 (Exponentialfunktion)

a) Schreibe die Reihen für die Exponentialfunktion, die Sinus- und die Cosinusfunktion auf und zeige damit für alle $x \in \mathbb{R}$ die ***Formel von Euler und de Moivre*** $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$.

b) Aus a) und der Formel $\exp(x + a) = \exp(x) \cdot \exp(a)$ folgere

   i) die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus.

   ii) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und somit, dass $\exp(ix)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis $\{|z| = 1; z \in \mathbb{C}\}$ ist.

   iii) $\exp(ix + i2\pi) = \exp(ix)$.

c) *Polarkoordinatendarstellung*. Zeige, dass sich jede komplexe Zahl $z \neq 0$ eindeutig in der Form $z = r\exp(i\varphi)$ mit $r \in \mathbb{R}_+$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ darstellen läßt.

Aufgabe 0.4 (N-te Wurzeln von Eins)

Betrachte die Polynome in $\mathbb{C}_N[Z]$, $P_N(Z) := Z^N - 1$, $Z \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$. Die Nullstellen in $\mathbb{C}$ nennt man die **N-ten Wurzeln von Eins**. Benutze die Polardarstellung der komplexen Zahlen, um diese zu bestimmen. Markiere auf einer Skizze der $\mathbb{C}$-Ebene die 5. und 6. Wurzeln von Eins. Zeige, dass diese geometrisch durch ein einbeschriebenes (bzw. umschriebenes) reguläres Polygon in (bzw. um) den Einheitskreis gefunden werden können.
Argumentiere nun, dass es eine Intervallschachtelung gibt, um den Kreisumfang zu bestimmen. Im wesentlichen hat Archimedes auf dieser Weise eine Approximation von π errechnet.

Aufgabe 0.5 (Algebraisches Eigenwertproblem)

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einer Basis x_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Sei $L\colon V \to V$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$x_1 \mapsto x_2 \quad , \quad x_2 \mapsto x_3 \quad , \quad x_3 \mapsto x_4 \quad , \quad x_4 \mapsto x_1 \ .$$

Bestimme alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von L.