UNE REMARQUE SUR LE THÉORÈME DE CAMERON–MARTIN

SYLVIE ROELLY ET HANS ZESSIN

INTRODUCTION. Dans la note au CRAS [3] (pour un résultat plus fin, voir [4]) nous caractérisions la mesure de Wiener P sur $\mathcal{C}(0,1)$ comme la seule probabilité sur cette espace pour laquelle l'intégrale stochastique et l'opérateur de dérivation soient en dualité. C'est cette caractérisation de P que nous utilisons ici pour démontrer très simplement le premier théorème de transformation de Cameron et Martin [1] la mesure image de P par une translation déterministe sur les trajectoires est absolument continue par rapport à P, et de densité la martingale exponentielle bien connue. L'intérêt de notre méthode réside dans le fait que nous n'utilisons ni la formule d'Itô, ni une approximation du processus de translation par des processus simples, comme cela est le cas dans les preuves usuelles, mais uniquement des calculs élémentaires de dérivée de Fréchet de fonctionnelles sur $C(0,1)$.

1. Voici le théorème précis dont nous proposons une démonstration élémentaire:

THÉORÈME. *L'image de la mesure de Wiener P sur $\Omega = \mathcal{C}(0,1)$ par la translation τ définie sur Ω par:*

$$\tau : \Omega \longrightarrow \Omega$$

$$\omega \longmapsto \tau(\omega) = \omega + \int_0^{\cdot} b(s)ds \tag{1}$$

où $b \in L^2(0,1)$, est la mesure de probabilité Q de densité $\mathcal{E}(b)$ par rapport à P, où

$$\mathcal{E}(b) = \exp\left(\int_0^1 b(s)dX_s - \frac{1}{2}\int_0^1 b^2(s)ds\right). \tag{2}$$

($\int_0^1 b(s)dXs$ est l'intégrale de Wiener de b par rapport au processus canonique X).

La preuve s'appuiera essentiellement sur la proposition suivante (Théorème 1.2 de [4]):

PROPOSITION:. *La mesure de Wiener est l'unique probabilité sur Ω sous laquelle le processus canonique X_t soit intégrable pour tout t et pour laquelle l'équation*

$$E(F \cdot \int_0^1 g(s)dX_s) = E(D_g F) \tag{3}$$