C. R. Acad. Sci. Paris, t. 313, Série I, p. 309-312, 1991

Probabilités/*Probability Theory*

Une caractérisation des diffusions par le calcul des variations stochastiques

Sylvie Roelly et Hans Zessin

Résumé – La mesure de Wiener est caractérisée comme *l'unique* diffusion « d'équilibre », au sens où elle est l'unique loi sous laquelle l'opérateur de dérivation sur l'espace canonique et l'intégrale de Skorohod sont en dualité. Ce résultat est généralisé aux processus de Wiener avec dérive.

A characterization of diffusions by the stochastic calculus of variations

Abstract – *The Wiener measure is characterized as the* unique *diffusion law solution of the "equilibrium condition" which expresses that the Skorohod integral is equivalent to the dual of the derivative operator on Wiener space. This result is extended to the characterization of a large class of Wiener measures with drift.*

0. Introduction. – Nous considérons des diffusions sur l'espace $\Omega = \mathscr{C}([0, +\infty[)$, c'est-à-dire les lois de probabilités Q qui sont localement dominées par la mesure de Wiener P et de densité de carré intégrable, et nous montrons d'abord que dans cette classe de probabilités sur Ω la mesure de Wiener est *caractérisée* par la condition « d'équilibre » suivante :

$$E_P(F\zeta_g) = E_P(D_g F) \tag{1.1}$$

pour une large classe de fonctionnelles F sur Ω et de fonctions g locales sur $\mathbb{R}_+$. Nous notons ζ_g l'intégrale d'Ito de g sur $\mathbb{R}_+$ et $D_g F$ le gradient de F dans la direction $\int_0^\cdot g(s)\,ds$ (D est l'opérateur d'annihilation dans l'espace de Wiener).

Dans une deuxième étape, nous montrons que Q, la loi du processus de Wiener avec dérive β, est *caractérisée* par la condition d'équilibre généralisée suivante :

$$E_Q(F\zeta_g) = E_Q(D_g F) + E_Q\left(F D_g\left(\zeta_\beta - \frac{1}{2}\int \beta_s^2\,ds\right)\right) \tag{1.2}$$

pour une assez grande classe de fonctionnelles F et de fonctions g. Les conditions (1.1) et (1.2) sont qualifiées de conditions d'équilibre, car les diffusions considérées sont des états d'équilibre au sens de la mécanique statistique, *i.e.* maximisent l'énergie libre liée à un certain potentiel (*cf.* [9]). D'autre part, il existe une analogie directe entre l'équation (1.2) et l'équation d'équilibre (3.3) de [8] qui caractérise les mesures de Gibbs de systèmes à une infinité de particules.

Notations et cadre du problème. – Sur Ω muni de sa tribu canonique $(\mathscr{F}_t)_{t>0}$ et de la mesure de référence P, la mesure de Wiener, on s'intéressera aux probabilités de l'ensemble suivant :

$$\mathscr{P} = \left\{ Q,\ \forall t>0,\ Q|_{\mathscr{F}_t} \ll P|_{\mathscr{F}_t} \text{ et } M_t = \left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathscr{F}_t} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Note présentée par Paul-André Meyer.

0764-4442/91/03130309 $ 2.00