

PACKUNGEN AUS KREISSCHEIBEN

CHARLOTTE DOMBROWSKY, MYRIAM FRADON, AND SYLVIE ROELLY

ZUSAMMENFASSUNG. Wir beschäftigen uns mit Konfigurationen von gleichgroßen Kreisscheiben in einer Ebene, die sich nicht überlappen. Wir sind insbesondere daran interessiert, die Konfiguration(en) zu finden, die eine minimale quadratische Energie besitzen. In der Tat, ist die genaue Geometrie der optimalen Konfiguration(en) nur für sehr kleine Systeme schon bekannt. Wir schlagen hier eine wahrscheinlichkeitstheoretische Methode vor, die effizient für Systeme **jeder Größe** ist.

EINFÜHRUNG

Schon immer fragten sich Ingenieur*innen, Techniker*innen, Händler*innen, wie man am besten gleichgroße Kugeln im Raum aufstapelt, zum Beispiel Kanonenkugeln, Murmeln oder Orangen. Einige versuchen, aus naheliegenden Gründen, das von den Kugeln beanspruchte Volumen zu minimieren, andere wollen die Dichte der erhaltenen Figur maximieren (siehe Abbildung 1).

Diese geometrische Frage ist die Quelle vieler weiterer Fragen:

- Geht es um Segmente (eindimensionale Sphären), Kreisscheiben (zweidimensionale Sphären), Kugeln (Dimension 3) oder Hypersphären (in einer größeren Dimension als 3)?
- Ist die Anzahl der Sphären endlich oder unendlich?
- Falls sie endlich ist, versucht man, den Anteil des von den Sphären eingenommen Volumen in der konvexen Hülle der Konfiguration zu maximieren? Oder minimiert man die Oberfläche

C. Dombrowsky: ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz. Email: ch.dombrowsky@gmx.de.

M. Fradon: U.F.R. de Mathématiques, CNRS UMR 8524, Université Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, Frankreich. Email: Myriam.Fradon@univ-lille1.fr .

S. Roelly: Institut für Mathematik der Universität Potsdam, Karl-Liebknecht-Str. 24-25, 14476 Potsdam OT Golm. Email: roelly@math.uni-potsdam.de.



ABBILDUNG 1. Kanonenkugeln, Historisches Museum, Straßburg

dieser konvexen Hülle? Oder versucht man, die Kusszahl - die Anzahl der Sphären, die eine einzige andere Sphäre berühren, ohne sie zu überlappen - zu maximieren? Oder versucht man eine möglichst kompakte Konfiguration zu finden, deren Energie minimal ist?

Der*Die Leser*in, der*die an diesen unterschiedlichen Problemstellungen und ihrer mathematische Erläuterung interessiert ist, kann die aktuelle und sehr klare Monografie [1] betrachten.

Wir werden uns im Folgenden auf Konfigurationen von gleichgroßen Kreisscheiben in einer Ebene konzentrieren, die eine gewisse Energie minimieren aber sich nicht überschneiden.

Diese Konfigurationen finden Anwendungen in sehr vielen Bereichen, zum Beispiel in der Clusterchemie, wo diese als *atomische Aggregate* (siehe [15]) vorkommen; bei für das Senden von Signalen benötigten Verschlüsselungen (siehe [5]); in der optischen Physik, um optimale optische Fasern zu entwerfen (siehe [12]); oder in der Logistik, zum Beispiel um folgende (wichtige!) Frage zu beantworten: Wie verpackt man am meisten Frankfurter Würstchen in einer zylinderförmigen Dose?

Wir verfolgen zwei Ziele, ein theoretisches und ein praktisches.

Zuerst analysieren wir die Kreispackungen vom Standpunkt der diskreten Geometrie. Wir werden uns insbesondere mit sechseckigen Konfigurationen beschäftigen, welche bemerkenswerte Eigenschaften besitzen. Unter anderem berechnen wir explizit eine charakteristische Größe, ihre *quadratische Energie*. Wir werden zeigen, dass kleine sechseckige Konfigurationen (deren Seitenlänge kleiner oder gleich 7 ist) optimale netzartige Packungen sind, das heißt, dass sie die kleinste quadratische Energie aller Kreisscheibenkonfigurationen besitzen, die auf einem dreieckigen Netz zentriert sind.

Größere sechseckigen Packungen jedoch besitzen diese Eigenschaft nicht mehr. Auf der Suche nach Hinweisen zur Lösung der Frage, die Toth 1967 stellte,

What is the shape of a cluster of n spheres with equal radii minimizing their quadratic energy, i.e. their 2nd moment about their center of mass?

verwenden wir eine ganz andere Methode, eine wahrscheinlichkeitstheoretische Methode. Wir konstruieren eine zufällige Dynamik von Kreisscheiben, die sich nach langer Evolution in einer fast optimalen Konfiguration stabilisiert. Mit der Simulation dieser Bewegung (nach einer sinnvollen Wahl der Parameter), kann man folgende vernünftige These aufstellen:

Die Packungen aus Kreisscheiben, die die quadratische Energie minimieren, sind kreisförmig und auf dem dreieckigen Netz zentriert.

1. OPTIMALE KREISPACKUNGEN UND QUADRATISCHE ENERGIE

In diesem Abschnitt werden wir uns mit Packungen aus Kreisscheiben (häufig auch *pennies* im englischsprachigen Raum) beschäftigen, mit dem Ziel ihre quadratische Energie (auch *second moment* genannt) zu minimieren. Obwohl dieses Problem einfach und sehr angewandt scheint, ist es größtenteils noch ungelöst, sobald die Anzahl der Kreisscheiben größer als sieben ist.

In diesem Abschnitt werden wir die für unsere Analyse notwendigen mathematischen Größen

einführen, einige explizite Berechnungen der Energie ausführen und die Vielfältigkeit der noch verbleibenden unbeantworteten Fragen hervorheben.

1.1. Die quadratische Energie einer Konfiguration von Kreisscheiben. Wir nennen **Konfiguration von n Kreisscheiben** eine Menge \mathbf{x} aus n offenen Kreisscheiben mit Radius eins in der Euklidischen Ebene. **Die Scheiben dürfen sich nicht überschneiden.** Jede Konfiguration ist demnach durch die Position der Mittelpunkte der Kreisscheiben gegeben:

$$\mathbf{x} \equiv \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^2$$

die selbstverständlich, für alle $1 \leq i < j \leq n$, die Bedingung $|x_i - x_j| \geq 2$ erfüllt, wo $|\cdot|$ die für die euklidische Norm verwendete Notation ist.

Definition 1. Wir nennen **quadratische Energie** einer Konfiguration \mathbf{x} von n Kreisscheiben die Summe der Quadrate der Distanzen zwischen jedem Paar von Mittelpunkten: $\sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|^2$. Die **mittlere quadratische Energie** ist dann gegeben durch

(Mittlere Energie)
$$\mathcal{E}_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|^2.$$

Lemma 2. Die mittlere quadratische Energie einer Konfiguration \mathbf{x} berechnet sich mit Hilfe des Abstandes zwischen jeder Kreisscheibe und dem Gravitationszentrum der Konfiguration:

(Zweites Moment)
$$\mathcal{E}_n(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - \bar{x}|^2 \quad \text{wobei} \quad \bar{x} := \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Beweis. Für jedes Paar von Mittelpunkten gilt

$$|x_i - x_j|^2 = |(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - x_j)|^2 = |x_i - \bar{x}|^2 + |\bar{x} - x_j|^2 + 2(x_i - \bar{x}, \bar{x} - x_j)$$

und, per Definition des Gravitationszentrums, $\sum_{1 \leq j \leq n} (\bar{x} - x_j) = 0$ und somit

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2n} \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} |x_i - x_j|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - \bar{x}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq n} |\bar{x} - x_j|^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - \bar{x}|^2 \end{aligned}$$

□

Wir können nun das weiter oben erwähnte Konzept der Optimierung definieren.

Definition 3. Eine Konfiguration \mathbf{x}_{min} von n Kreisscheiben wird **optimal** genannt, falls ihre quadratische Energie minimal unter allen Konfigurationen mit n Kreisscheiben ist:

$$\mathcal{E}_n(\mathbf{x}_{min}) = \min\{\mathcal{E}_n(\mathbf{x}); \mathbf{x} \text{ Konfigurationen mit } n \text{ Kreisscheiben}\}$$

Wir nennen \mathcal{C}_{min} die Menge der optimalen Konfigurationen, modulo Drehungen, Spiegelungen und Verschiebungen in der Ebene.

Die Frage von Toth, eingeschränkt auf der Ebene, ist dann:

(1) das Berechnen der minimalen quadratischen Energie eine Konfiguration von n Kreisscheiben

(2) das Bestimmen der Menge \mathcal{C}_{min} von Konfigurationen, bei denen diese minimale Energie erreicht wird.



ABBILDUNG 2. Optimale Konfigurationen von zwei, bzw. drei Kreisscheiben und ihre respektive mittlere Energie.

Für $n = 2$ und $n = 3$ ist die Situation trivial und die Fragen (1) und (2) sind in der Abbildung 2 beantwortet. Die Menge \mathcal{C}_{min} der optimalen Konfigurationen besteht aus einer einzigen Konfiguration.

Der Fall $n = 4$ ist etwas subtiler. Die durchschnittliche Energie ist minimal für unendlich viele unterschiedliche Konfigurationen: $\text{card } \mathcal{C}_{min} = +\infty$. Alle diese optimale Konfigurationen zeigen eine trapezartige Form. Man erhält sie indem man zwei obere Kreisscheiben auf zwei untere Kreisscheiben rollen lässt, so dass die Zahl der Kontaktpunkte ist wenigstens gleich 4, siehe Abbildung 3.

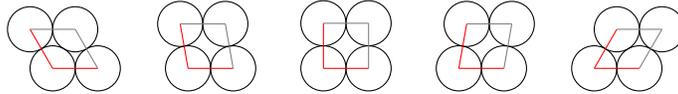


ABBILDUNG 3. Beispiele der optimalen Konfigurationen für vier Kreisscheiben: $\mathcal{E}_4(\mathbf{x}_{min}) = 8$

Bis auf Rotationen und Translationen sind diese Konfigurationen durch den Winkel θ zwischen den beiden roten Segmenten bestimmt. Indem man den Ursprung der Euklidischen Ebene auf das Zentrum der unteren, linken Scheibe legt, erhält man:

$$\mathcal{C}_{min} = \left\{ (0, 0), (2, 0), 2(\cos \theta, \sin \theta), 2(1 + \cos \theta, \sin \theta) \right\}, \theta \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right[.$$

Durch Nachrechnen überprüfen wir, dass in dieser Menge die mittlere Energie konstant ist: für beliebige $\theta \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right[$,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_4(\mathbf{x}_{min}) &= \frac{1}{4} \left(4 \times 2^2 + |2(1 + \cos \theta, \sin \theta)|^2 + |2(\cos \theta, \sin \theta) - (1, 0)|^2 \right) \\ &= 2^2 + (2 + 2 \cos \theta) + (2 - 2 \cos \theta) = 8. \end{aligned}$$

Für $n = 5$ oder $n = 6$ ist die Antwort auf die Frage von Toth nicht offensichtlich. Die in Abbildung 4 ersten beiden dargestellten optimalen Konfigurationen kann man als Teilmengen der Margerite, der optimalen Konfiguration für $n = 7$, interpretieren. Diese letztere wurde 1974 durch die Mathematikerin A. Temesvári in einer bemerkenswerten und fast unbekanntem (da auf ungarisch) geometrischen Arbeit [16] beschrieben, siehe Abbildung 5.

Wir unterstreichen, dass die Mittelpunkte dieser optimalen Konfigurationen benachbarte Punkte auf einem dreieckigen Netz, das wir von nun an \mathcal{T} nennen, liegen.

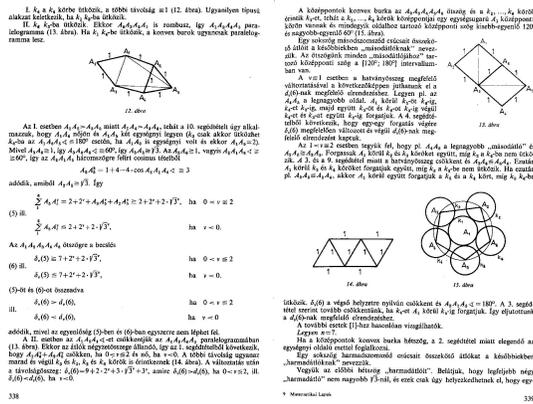


ABBILDUNG 5. Ausschnitt aus dem Artikel [16] von A. Temesvári

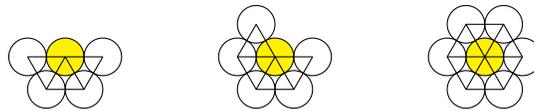


ABBILDUNG 4. Die einzigen optimalen Konfigurationen von 5 (bzw. 6 oder 7) Kreisscheiben in der Margeriten-Form, in der respektive ein oder zwei Blütenblätter fehlen. Die Mittelpunkte der Kreisscheiben sind auf dem Netz \mathcal{T} .

Für $n > 7$ ist die Beschreibung von \mathcal{C}_{min} bis heute unvollständig. Das erfolgreichste Ergebnis wurde von Chow [3] erreicht, der die quadratische Energie nur für netzartigen Konfigurationen - deren Mittelpunkte auf \mathcal{T} liegen - minimieren konnte.

Wir bemerken auch, dass die Margerite eine sechseckige Konfiguration ist, was kein Zufall ist, da die Zahl 7 die erste nicht triviale *zentrierte Sechseckszahl* ist. Darum werden wir uns nun auf Konfigurationen konzentrieren, deren Kardinal eine dieser interessanten Zahlen ist.

1.2. Schönheit und Nutzen der zentrierten Sechseckszahlen. Wir erinnern uns zuerst an die algebraische Definition.

Definition 4. Eine *zentrierte Sechseckszahl* n ist eine ganze Zahl $n(h)$, die sich auf folgende Art zerlegen lässt:

$$(5) \quad n(h) = 1 + 6 \frac{h(h-1)}{2} = 3h^2 - 3h + 1 = h^3 - (h-1)^3$$

für eine gewisse ganze Zahl h .

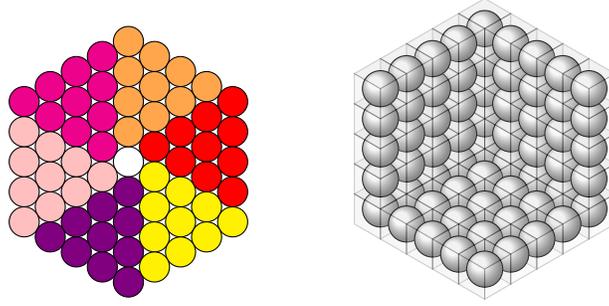


ABBILDUNG 6. Zerlegung der Sechseckszahl $n(h)$ in sechs Blütenblätter (erster Ausdruck in (5)), oder in die Differenz von zwei konsekutiven Würfeln (letzter Ausdruck in (5)).

Sie entspricht der Anzahl von ähnlichen Kreisscheiben, die man in einem regelmäßigen Sechseck auf dem dreieckigen Netz \mathcal{T} um eine zentrierte Kreisscheibe im Gravitationszentrum \bar{x} der Konfiguration anordnen kann. Die Zahl h stellt also die Anzahl der angeordneten Kreisscheiben auf jeder Seite des Sechseckes dar oder auch die Anzahl der Schichten im Sechseck (der graphische Beweis ist in der Abbildung 6 gegeben.) Es lässt sich leicht überprüfen, dass jedes der sechs farbigen Blütenblätter aus $\frac{h(h-1)}{2}$ Kreisscheiben besteht. Die Abbildung 7 zeigt die graphische Darstellung der sechseckigen Konfigurationen der Seitenlänge $h = 1, 2, 3, 4$ und 5 .

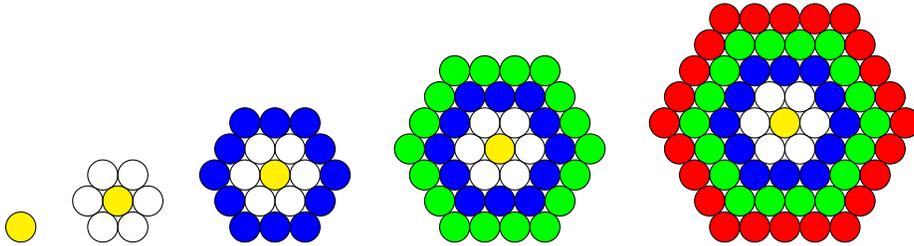


ABBILDUNG 7. Abbildung der sechseckigen Konfigurationen $\mathbf{x}_{hex}(1)$, resp. $\mathbf{x}_{hex}(2)$, $\mathbf{x}_{hex}(3)$, $\mathbf{x}_{hex}(4)$ und $\mathbf{x}_{hex}(5)$, von Kardinal $n(1) = 1$ resp. $n(2) = 7$, $n(3) = 19$, $n(4) = 37$ und $n(5) = 61$.

1.3. Berechnung der mittleren quadratischen Energie einer sechseckigen Konfiguration. Zur Vereinfachung nennen wir $E(h)$ die mittlere quadratische Energie der sechseckigen Konfiguration $\mathbf{x}_{hex}(h)$ der Seitenlänge h , und der Kardinalität $n(h)$:

$$E(h) := \mathcal{E}_{n(h)}(\mathbf{x}_{hex}(h))$$

1.3.1. Konfigurationen von kleiner Größe. In diesem Abschnitt werden wir die zwei kleinsten, nicht trivialen sechseckigen Konfigurationen behandeln.

Wir beginnen mit der Margerite der Seitenlänge $h = 2$. Wir nummerieren zuerst die Kreisscheiben, dabei fangen wir im Mittelpunkt an und folgen den zwei Schichten. Wir benutzen

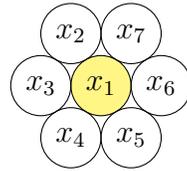


ABBILDUNG 8. Nummerierung der sechseckigen Konfiguration der Seitenlänge $h = 2$ und Kardinalität $n(2) = 7$.

nun den Ausdruck des zweiten Momentes, um die quadratische Energie dieser Konfiguration zu berechnen. Da der Mittelpunkt der zentralen Kreisscheibe, genannt x_1 , dem Gravitationszentrum entspricht, erhalten wir die Energie aus einer Summe von sechs gleichen Termen:

$$E(2) = \sum_{i=2}^7 |x_i - x_1|^2 = 6 \cdot 2^2 = 24.$$

Wir berechnen nun die Energie einer Konfiguration der Seitenlänge $h = 3$. Auch hier be-

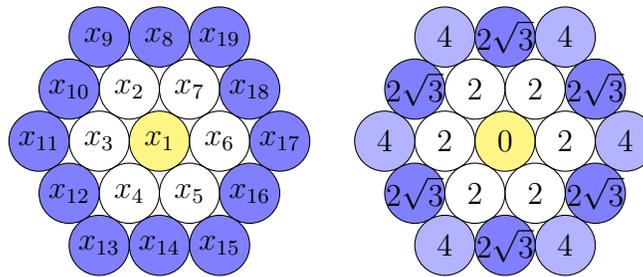


ABBILDUNG 9. Links: Nummerierung der sechseckigen Konfiguration $\mathbf{x}_{hex}(3)$ und ihrer 3 Schichten; Rechts: Abstand der Mittelpunkte der Kreisscheiben zum Gravitationszentrum $\bar{x} = x_1$

nutzen wir den Ausdruck des zweiten Momentes und führen das Gravitationszentrum x_1 und die bereits berechnete Energie ein, um die mittlere quadratische Energie dieser Konfiguration zu beschreiben.

$$\begin{aligned} E(3) &= \sum_{i=2}^7 |x_i - x_1|^2 + \sum_{i=8}^{19} |x_i - x_1|^2 \\ &= E(2) + 6 \cdot (|x_8 - x_1|^2 + |x_9 - x_1|^2) \\ &= 24 + 6 \cdot ((2\sqrt{3})^2 + 4^2) \\ &= 192. \end{aligned}$$

Wir stellen nun zwei sehr unterschiedliche Kontexte vor, in denen die Packung aus $n(3)$ Kreisscheiben auftaucht. Eine Skulptur in der Kathedrale von Magdeburg aus dem 13. Jahrhundert stellt den germanischen Kaiser Otto I. und seine Frau Editha dar. Er hält stolz eine sechseckige Konfiguration mit 19 Kreisscheiben in seiner rechten Hand, deren Interpretation bis heute ein Mysterium bleibt (und somit eine Quelle der Uneinigkeit zwischen Historiker*innen.)



ABBILDUNG 10. Editha und Otto, Magdeburg, 1245; Foto Wikipedia Chris 73

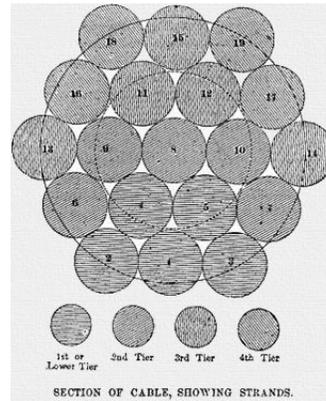


ABBILDUNG 11. Brooklyn Bridge. (Photo Par I, FoxCompany2, CC BY-SA 3.0 et Pinterest Brooklyn Bridge Construction)

Ebenfalls wissen seit langer Zeit Ingenieur*innen auf empirische Weise, dass die sechseckige Geometrie einen optimalen Widerstand bildet. Darum wurde sie beispielsweise beim Bau von Kabeln benutzt: Die Kabel der 1883 eingeweihten Brooklyn Bridge bestehen aus $19 = n(3)$ Leitungen, die wiederum aus $331 = n(11)$ metallischen Fäden des Durchmessers $1/8$ bestehen, siehe Abbildung 11.

1.3.2. *Energie einer sechseckigen Konfiguration beliebiger Größe.* In diesem Abschnitt präsentieren wir eine explizite Formel, deren Beweis sich auf das zweite Moment stützt, so wie auf die Invarianz jeder sechseckigen Konfiguration bei einer Rotation von $\pi/3$, illustriert in der Abbildung 6.

Proposition 6. *Die mittlere quadratische Energie einer sechseckigen Konfiguration $\mathbf{x}_{hex}(h)$ ist gegeben durch*

$$(7) \quad E(h) = h(h-1)(5h(h-1)+2) = \frac{(n(h)-1)(5n(h)+1)}{9}$$

Bemerkung: Die Energie $E(h)$ ist in der Tat eine Funktion von $\frac{h(h-1)}{2} = \binom{h}{2}$, wobei $\binom{h}{2}$ nichts anderes ist als der Kardinal jedes Blütenblattes der sechseckigen Konfiguration der Seitenlänge h . Darüberhinaus verallgemeinert sich diese Formel ohne Weiteres für Kreisscheiben von beliebigen Radius r :
$$E(h) = (2r)^2 \binom{h}{2} \left(5 \binom{h}{2} + 1 \right).$$

Beweis. Indem wir wie oben die Kreisscheiben schichtweise nummerieren, erhalten wir die iterative Formel

$$(8) \quad E(h+1) = E(h) + \sum_{i=n(h)+1}^{n(h+1)} |x_i - x_1|^2.$$

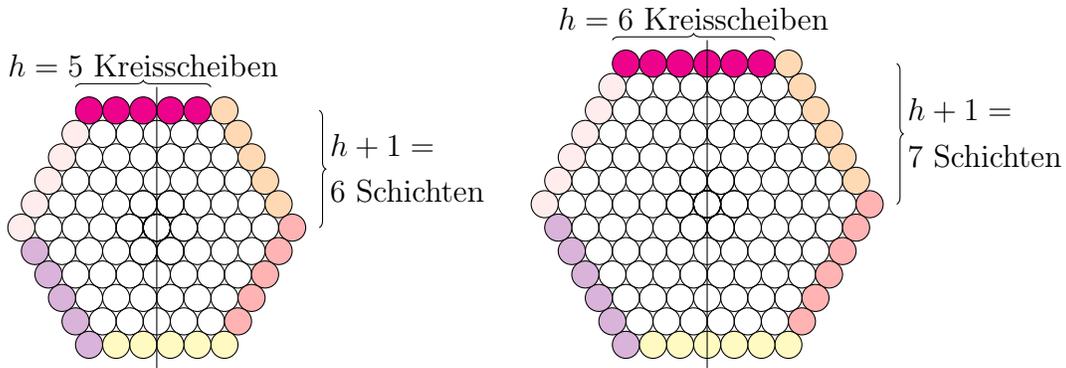


ABBILDUNG 12. Die äußeren Kreisscheiben eines Blütenblattes, hier in rosa, sind verantwortlich für $1/6$ der Steigerung der mittleren Energie $E(h+1) - E(h)$.

Dank der Zerlegung der Sechsecke in sechs identische Blütenblätter (siehe Abbildung 6), ist der Zuwachs der mittleren Energie $E(h+1) - E(h)$ sechs mal der Anteil der rosafarbenen Kreisscheiben der Abbildung 12. Legen wir den Ursprung in $\bar{x} = x_1$ fest, so haben alle diese Kreisscheiben die gleiche Ordinate, gegeben durch $\frac{\sqrt{3}}{2}2h = \sqrt{3}h$. Der Unterschied der Abszissen zweier nebeneinanderliegender rosafarbenen Kreisscheiben beträgt zwei, dabei ist die niedrigste Abszisse $-h$ und die höchste $h-2$. Die Abszisse der orangefarbenen Scheibe, die nicht zu dem Blütenblatt gehört, ist h .

Wir schreiben demnach:

$$\begin{aligned} \sum_{i=n(h)+1}^{n(h+1)} |x_i - x_1|^2 &= 6 \left((-h)^2 + (-h+2)^2 + \dots + (h-2)^2 + h(\sqrt{3}h)^2 \right) \\ &= 6 \left(\sum_{k=0}^{h-1} (-h+2k)^2 + 3h^3 \right) \\ &= 6 \left(4 \sum_{k=0}^{h-1} k^2 - 4h \sum_{k=0}^{h-1} k + h^3 + 3h^3 \right). \end{aligned}$$

Da $\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ und $\sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$, erhalten wir

$$\sum_{i=n(h)+1}^{n(h+1)} |x_i - x_1|^2 = 24 \left(\frac{(h-1)h(2h-1)}{6} - h \frac{(h-1)h}{2} + h^3 \right) = 4h(5h^2 + 1).$$

Die Formel (8) zusammen mit dem obigen Ergebnis ergibt:

$$E(h) = \sum_{l=0}^{h-1} 4l(5l^2 + 1) = 20 \sum_{l=1}^{h-1} l^3 + 4 \sum_{l=1}^{h-1} l.$$

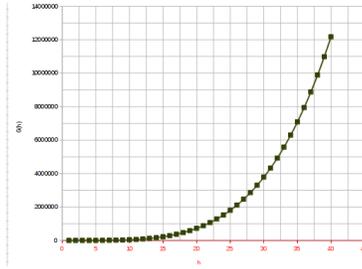
Da $\sum_{l=1}^m l^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$ und weil $(h-1)h = \frac{n(h)-1}{3}$,

$$\begin{aligned} E(h) &= 20 \sum_{l=1}^{h-1} l^3 + 4 \sum_{l=1}^{h-1} l = 5(h-1)^2 h^2 + 2(h-1)h \\ &= (h-1)h(5h^2 - 5h + 2) \\ &= \frac{(n(h)-1)(5n(h)+1)}{9}. \end{aligned}$$

□

TABELLE 1. Die mittlere Energie der vierzig ersten Sechseckigen Konfigurationen in Abhängigkeit der Seitenlänge des Sechsecks.

h	$n(h)$	$E(h)$	h	$n(h)$	$E(h)$
1	1	0	21	1261	882840
2	7	24	22	1387	1068144
3	19	192	23	1519	1281192
4	37	744	24	1657	1524624
5	61	2040	25	1801	1801200
6	91	4560	26	1951	2113800
7	127	8904	27	2107	2465424
8	169	15792	28	2269	2859192
9	217	26064	29	2437	3298344
10	271	40680	30	2611	3786240
11	331	60720	31	2791	4326360
12	397	87384	32	2977	4922304
13	469	121992	33	3169	5577792
14	547	165984	34	3367	6296664
15	631	220920	35	3571	7082880
16	721	288480	36	3781	7940520
17	817	370464	37	3997	8873784
18	919	468792	38	4219	9886992
19	1027	585504	39	4447	10984584
20	1141	722760	40	4681	12171120



1.4. Sind die großen sechseckigen Konfigurationen immer noch optimal? Kehren wir zu der Suche nach der Menge \mathcal{C}_{min} zurück, die bei der Betrachtung der quadratischen Energie optimal ist (Siehe Definition 3.)

Nach der Arbeit von Temesvári [16] ist die Margerite $\mathbf{x}_{hex}(2)$ die einzige Konfiguration unter *allen* Konfigurationen mit $n(2) = 7$ Kreisscheiben, die die quadratische Energie minimiert: für $n = 7$ gilt $\mathcal{C}_{min} = \{\mathbf{x}_{hex}(2)\}$. Aber was ist mit der sechseckigen Konfiguration der Seitenlänge $h = 3$? Ist sie optimal unter den Konfigurationen mit 19 Kreisscheiben? Und sind die anderen größeren sechseckigen Konfigurationen auch optimal?

Wir beantworten diese Fragen in der unterstehenden Proposition. Die Antwort ist bejahend für ausreichend *kleine* Konfigurationen ($h \leq 7$) und falls die Optimierung nur die netzartigen Konfigurationen betrifft. Für *größere* sechseckige Konfigurationen ($h \geq 8$) werden wir diese Aussage durch Gegenbeispiele widerlegen.

Proposition 9. *Unter den netzartigen Konfigurationen ist die sechseckige Packung der Seitenlänge h optimal, falls $h \leq 7$:*

$$\begin{aligned} E(h) &:= \mathcal{E}_{n(h)}(\mathbf{x}_{hex}(h)) \\ &= \min\{\mathcal{E}_{n(h)}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \text{ Konfiguration aus } n(h) \text{ Kreisscheiben mit } \mathbf{x} \subset \mathcal{T}\}. \end{aligned}$$

In anderen Fällen trifft dies nicht zu: für $h \geq 8$, $\mathbf{x}_{hex}(h) \notin \mathcal{C}_{min}$, denn

$$E(h) > \min\{\mathcal{E}_{n(h)}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \text{ Konfiguration aus } n(h) \text{ Kreisscheiben}\}.$$

Um diese Proposition zu beweisen, beweisen wir zuerst, dass eine sechseckige Packung $\mathbf{x}_{hex}(h)$ (in einem noch zu erläuternden Sinn) kreisförmig ist genau dann, wenn sie klein genug ist, das heißt falls $2 \leq h \leq 7$. Anschließend verwenden wir das kraftvolle Ergebnis von Chow, der bewiesen hat, dass die optimalen netzförmigen Konfigurationen kreisförmig sind.

Definition 10. *Eine netzartige Konfiguration aus n Kreisscheiben, $\mathbf{x} \subset \mathcal{T}$, wird kreisförmig genannt, falls ein Radius $R > 0$ existiert, so dass alle Punkte auf dem dreieckigen Netz \mathcal{T} , deren Abstand zum Gravitationszentrum \bar{x} kleiner oder gleich R ist, zu dieser gehören. Anders gesagt, \mathbf{x} ist kreisförmig, falls*

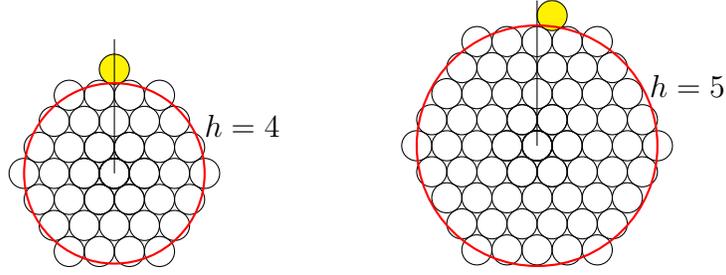
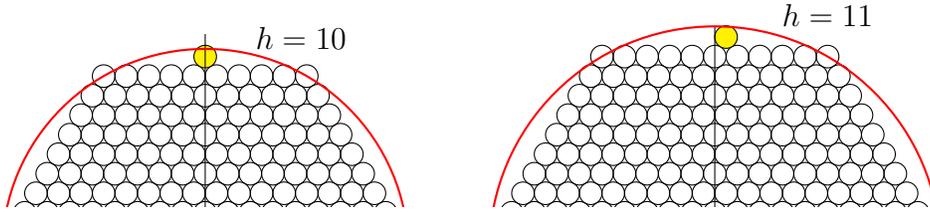
$$\mathbf{x} = \{x_i \in \mathcal{T}, |x_i - \bar{x}| \leq R\} \quad \text{wobei} \quad \bar{x} := \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Lemma 11. *Die sechseckige Konfiguration der Seitenlänge h ist kreisförmig genau dann, wenn $h \leq 7$.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass jede sechseckige Konfiguration unabhängig von ihrer Größe netzartig ist, $\mathbf{x}_{hex}(h) \subset \mathcal{T}$.

Sei $\mathbf{x}_{hex}(h)$ die sechseckige Konfiguration der Seitenlänge h . Nehmen wir zur Vereinfachung an, dass $x_1 = \bar{x} = 0$. Der Radius der kleinsten Kugel mit Zentrum $\bar{x} = 0$, der alle Punkte $x_2, \dots, x_{n(h)}$ umschließt, ist $2(h-1)$. Daraus schließen wir, dass $\mathbf{x}_{hex}(h)$ eine kreisförmige Konfiguration ist genau dann, wenn alle Punkte des Netzes \mathcal{T} die zu dieser Kugel $B(0, 2(h-1))$ gehören, die Punkte $x_1, x_2, \dots, x_{n(h)}$ sind. Wir unterscheiden jetzt beide Fälle, die in den Abbildungen 13 und 14 dargestellt sind.

(i) *h ist gerade* : Falls $B(0, 2(h-1)) \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$, kann man eine Kreisscheibe in die Mitte jeder

ABBILDUNG 13. Kreisförmige sechseckige Konfigurationen, $h \leq 7$.ABBILDUNG 14. Nicht kreisförmige sechseckige Konfigurationen, $h \geq 8$.

Seite legen, so dass ihr Zentrum in der Kugel $B(0, 2(h-1))$ sich befindet. Das heißt, der Punkt mit Koordinaten $(0, h\sqrt{3})$ befindet sich in der Kugel, oder:

$$\begin{aligned} |(0, h\sqrt{3})| \leq 2(h-1) &\Leftrightarrow 4(h-1)^2 - 3h^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow h^2 - 8h + 4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow h \geq \frac{2}{2 - \sqrt{3}} \approx 7,46. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass h mindestens 8 sein muss.

(ii) h ist ungerade: Falls $B(0, 2(h-1)) \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$, kann man auf die obere Seite des Sechsecks eine Kreisscheibe legen, deren Zentrum sich auf $(1, h\sqrt{3})$ befindet, und noch Teil der Kugel $B(0, 2(h-1))$ ist:

$$\begin{aligned} |(1, h\sqrt{3})| \leq 2(h-1) &\Leftrightarrow 4(h-1)^2 - 3h^2 - 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow h^2 - 8h + 3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow h \geq 4 + \sqrt{13} \approx 7,6. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass h mindestens 9 sein muss. □

Um den Beweis der Proposition 9 abzuschließen, verwenden wir die Charakterisierung der optimalen netzartigen Packung, die von Chow in der Proposition 3 des Artikels [3] bewiesen wurde. Diese sind kreisförmig (auf englisch: *Circular cluster*). Daraus folgt, dass für $2 \leq h \leq 7$ die sechseckigen Packungen kreisförmig und somit optimal unter der netzartigen Packungen sind.

Für $h \geq 8$, zeigt der konstruktive Beweis des Lemmas 11, dass die Konfiguration, die man durch das Verschieben der Kreisscheiben aus den Ecken in die Mitte der äußeren Seiten des

Sechseckes abrundet, eine kleinere Energie als das Sechseck hat. Die optimale(n) Konfiguration(en) von Kardinal $n(h)$ kann/können also nicht die sechseckigen sein.

FAZIT: Wenn $\mathbf{x}_{hex}(h)$ aber nicht optimal ist für h größer als 7, was ist dann die optimale Gestalt für große Konfigurationen, die aus $n > n(7) = 127$ Kreisscheiben bestehen?

Diese Frage ist bis jetzt nicht komplett beantwortet und war Quelle vieler Vermutungen. Unter anderen stellen Graham und Sloane in [11] drei unterschiedliche Methoden vor, wie man den Energiezuwachs, der durch das Hinzufügen einer Scheibe entsteht, minimieren kann. Chow [3] entwickelte dann einen teilweise zufälligen Algorithmus, der nach einer stetigen Gleichverteilung unter mehreren Möglichkeiten zufällig die Stelle auswählt, an der eine neue Kreisscheibe der vorherigen Schicht hinzugefügt wird.

All diese raffinierten Versuche sind jedoch beschränkt durch die Konstruktion von netzartigen Konfigurationen. Da es heute unmöglich erscheint, einen Algorithmus zu finden, der optimale, nicht netzartige Konfigurationen generiert, stellen wir im zweiten Teil dieses Artikels eine grundsätzlich andere Herangehensweise vor, einen wahrscheinlichkeitstheoretischen Zugang.

2. ZUFÄLLIGE DYNAMIK DER KREISSCHEIBEN UND IHR GLEICHGEWICHTSZUSTAND

In diesem Teil werden wir die optimalen Konfigurationen von Kreisscheiben beliebiger Größe - die typischerweise nicht sechseckig sind - durch eine zufällige Dynamik der Kreisscheiben approximieren. Nach langer Zeit findet diese komplexe Bewegung einen Gleichgewichtszustand in einer Konfiguration, die nahe einer Konfiguration der minimalen Energie ist. Diese, in [2] eingeführte Methode, befreit uns somit vom Zwang der den vorherigen quasi-deterministischen Methoden inhärenten netzartigen Geometrie.

2.1. Zufällige Bewegung von sich gegenseitig anziehenden Kreisscheiben. Wir betrachten n Kreisscheiben (n kann sehr groß sein). Jede Kreisscheibe oszilliert zufällig und chaotisch in der Ebene, unabhängig von den anderen $(n - 1)$ Kreisscheiben. Diese wirken allerdings eine Anziehungskraft auf sie aus. Wenn außerdem zwei Kreisscheiben zusammenstoßen, stoßen sie sich nach den gebräuchlichen Gesetzen der Physik einer elastischen Kollision wieder ab, da sie sich nicht überschneiden können. Jede der n Kreisscheiben $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^2$ wird sich demnach in Abhängigkeit der Zeit t entlang einer gewissen, zufälligen Bahn in der Ebene bewegen. Genauer gesagt, werden die Funktionen $t \mapsto x_i(t), 1 \leq i \leq n$, das folgende System von stochastischen Integralgleichungen erfüllen:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l}
x_i(t) = \underbrace{x_i(0)}_{\text{Anfangsposition}} + \underbrace{W_i(t)}_{\text{Oszillation}} + \underbrace{a \int_0^t \sum_{j=1}^n (x_j(s) - x_i(s)) ds}_{\text{Anziehungskraft der anderen Kreisscheiben}} \\
+ \underbrace{\sum_{j=1}^n \int_0^t (x_i(s) - x_j(s)) dL_{ij}(s)}_{\text{durch Zusammenstöße bedingte Abstoßung}} , \\
L_{ij}(0) = 0, \quad L_{ij} \equiv L_{ji}, \quad L_{ii} \equiv 0, \quad \text{et} \quad \int_0^t \mathbb{1}_{|x_i(s) - x_j(s)| \neq 2} dL_{ij}(s) = 0, \\
\text{für jedes } i \in \{1, \dots, n\} \text{ und } t \geq 0.
\end{array} \right.$$

Wir betrachten nun die Bedeutung der vier obenstehenden Terme.

2.1.1. *Ausgangsposition.* Die Position der n Kreisscheiben zum Zeitpunkt 0 ist durch die ihrer Zentren gegeben, die für alle Paare $i \neq j$ die Bedingung $|x_i(0) - x_j(0)| \geq 2$ erfüllen. Sie formen die Ausgangskonfiguration $\mathbf{x}(0)$.

2.1.2. *Zufällige Brownsche Oszillation.* Die Oszillation, die jede Kreisscheibe im Verlauf der Zeit macht, ist eine zufällige Bewegung, genannt *Brownsche* Bewegung. Sie wurde nach dem Botaniker R. Brown benannt, der 1828 in seinem Mikroskop eine unregelmäßige, allgegenwärtige Bewegung von Pollenkörnern in einer Flüssigkeit entdeckte, die aber keine Lebenserscheinung war. Erst sehr viel später wurde diese Bewegung durch Einstein, Smoluchowsky und schließlich Wiener mathematisch beschrieben. (Letzterer prägte die Bezeichnung der Bewegung durch den Buchstaben W). Zu *jedem* Zeitpunkt verändert jede Kreisscheibe spontan die Richtung ihrer Bewegung, ohne eine bestimmte zu bevorzugen und unabhängig von den anderen Kreisscheiben. Daraus folgt, dass ihre Geschwindigkeit de facto unendlich ist und ihr Bahn eine fraktale Funktion ist, die nirgendwo differenzierbar ist (siehe Abbildung 15).

2.1.3. *Force d'attraction entre les disques.* A chaque instant s , le disque i est attiré par chacun des autres disques j avec une force qui est proportionnelle au vecteur $x_j(s) - x_i(s)$ qui les sépare, cf Figure 16. Le coefficient de proportionalité a est appelé coefficient d'attraction. Il jouera un grand rôle dans ce qui suit.

2.1.4. *Anziehungskraft zwischen den Kreisscheiben.* Zu jedem Zeitpunkt s wird die Scheibe i durch die anderen Kreisscheiben j angezogen, mit einer zu dem Vektor $x_j(s) - x_i(s)$, der die relative Position der beiden Kreisscheiben darstellt, proportionalen Kraft (siehe Figur 16). Der Proportionalitätskoeffizient a wird Anziehungskoeffizient genannt. Im Folgenden wird er eine wichtige Rolle spielen.

2.1.5. *Auswirkung der Zusammenstöße der Kreisscheiben.* Falls eine Kreisscheibe i sich einer Kreisscheibe j nähert und diese zu einem Zeitpunkt s berührt, $|x_i(s) - x_j(s)| = 2$, wird sie sofort zurückgestoßen, da sich die Kreisscheiben nicht überschneiden dürfen. Diese Rückstoßkraft, die den Gesetzen der elastischen Kollision folgt, ist kollinear zu dem Vektor $x_i(s) - x_j(s)$ (in blau in der Abbildung 16). Sie wird global dargestellt durch den additiven Term $\int_0^t (X_i(s) - X_j(s)) dL_{ij}(s)$. Ihre Intensität hängt von der Anzahl und den (zufälligen)

5. *Über die von der molekular-kinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen;*
von A. Einstein.

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß nach der molekular-kinetischen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten suspendierte Körper von mikroskopisch sichtbarer Größe infolge der Molekularbewegung der Wärme Bewegungen von solcher Größe ausführen müssen, daß diese Bewegungen leicht mit dem Mikroskop nachgewiesen werden können. Es ist möglich, daß die hier zu behandelnden Bewegungen mit der sogenannten „Brownischen Molekularbewegung“ identisch sind; die mir erreichbaren Angaben über letztere sind jedoch so ungenau, daß ich mir hierüber kein Urteil bilden konnte.

Wenn sich die hier zu behandelnde Bewegung samt den für sie zu erwartenden Gesetzmäßigkeiten wirklich beobachten läßt, so ist die klassische Thermodynamik schon für mikroskopisch unterscheidbare Räume nicht mehr als genau gültig anzusehen und es ist dann eine exakte Bestimmung der wahren Atomgröße möglich. Erwiese sich umgekehrt die Voraussage dieser Bewegung als unzutreffend, so wäre damit ein schwerwiegendes Argument gegen die molekular-kinetische Auffassung der Wärme gegeben.

§ 1. *Über den suspendierten Teilchen zuzuschreibenden osmotischen Druck.*

Im Teilvolumen V^* einer Flüssigkeit vom Gesamtvolumen V seien z -Gramm-Moleküle eines Nichtelektrolyten gelöst. Ist das Volumen V^* durch eine für das Lösungsmittel, nicht aber für die gelöste Substanz durchlässige Wand vom reinen Lösungs-

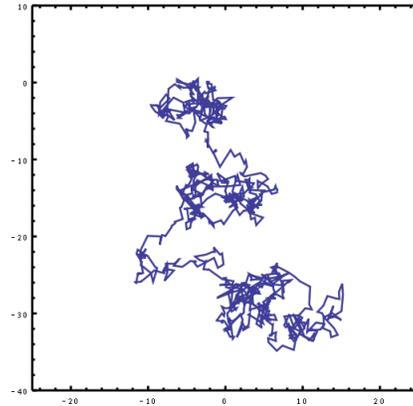


ABBILDUNG 15. Artikel von A. Einstein über die Brownsche Bewegung (1905); *rechts* eine Simulation von einer möglichen Bahn einer Brownschen Bewegung in der Ebene

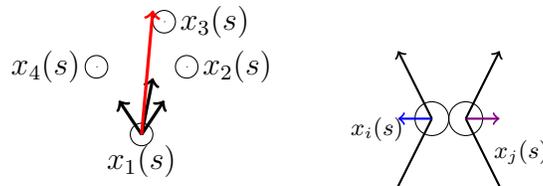


ABBILDUNG 16. *Links* die durch die Kreisscheiben $x_2(s)$, $x_3(s)$ und $x_4(s)$ auf $x_1(s)$ ausgeübten Anziehungskräfte; in rot ihre Summe. *Rechts*: Die Bewegung von $x_i(s)$ und $x_j(s)$ kurz vor und kurz nach dem Zusammenstoß. In Blau, die Kraft der elastischen Kollision, die $x_i(s)$ von $x_j(s)$ entfernt.

Zeitpunkten der Zusammenstöße zwischen i und j ab. Dies rechtfertigt, dass der Integrand ein wachsender, zufälliger Prozess ist, den wir mit $L_{ij}(t)$ bezeichnen und der *lokale Zeit des Zusammenstoßes* genannt wird. Letztere wächst nur, falls sich die zwei Kreisscheiben i und j berühren:

$$\int_0^t \mathbb{1}_{|x_i(s) - x_j(s)| \neq 2} dL_{ij}(s) = 0.$$

Die Anfangsbedingung $L_{ij}(0) = 0$ ist willkürlich.

Die Symmetrie $L_{ij} \equiv L_{ji}$ liegt in der Natur des Problems. Ein Zusammenstoß zwischen x_i und x_j hat einen symmetrischen Einfluss auf das Verhalten von x_i und x_j . (In der Abbildung 16 sind der blaue und der rosa Pfeil entgegengesetzt). Da ein Partikel nicht mit sich selbst zusammenstoßen kann, gilt $L_{ii} \equiv 0$.

Die Existenz einer mathematischen Lösung des Systemes (*) ist kein einfaches Problem, auf Grund der lokalen Zeiten des Zusammenstoßes, die selbst Unbekannte sind. Der erste Beweis eines solchen Existenzresultates wurde von Saisho und Tanaka in [13] 1986 gegeben. Sie behandeln den Fall ohne gegenseitige Anziehungskraft: $a = 0$. Die Autorinnen M.F. und S.R. haben diese Methode verbessert und ausgeweitet, um so auch den Fall des unendlichen Systems mit allgemeiner Interaktion behandeln zu können, siehe [9].

2.2. Stabilisierung gegen quasi-optimalen Packungen. Die Dynamik (*) ist in vielerlei Hinsicht bemerkenswert.

Wir bemerken zuerst, dass die augenblickliche Anziehungskraft zwischen Kreisscheiben (bis auf einen Koeffizienten) als Ableitung der quadratischen Energie gesehen werden kann, da

$$a \sum_{j=1}^n (x_j - x_i) = -\frac{an}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{E}_n(\mathbf{x}).$$

Die Dynamik (*) ist somit eine sogenannte *Gradienten-Dynamik*, von der man bestimmte zeitabhängige Eigenschaften kennt. Insbesondere hat die zweite Autorin in Theorem 3.3 von [7] bewiesen, dass, durch das Festlegen von zufälligen Ausgangspositionen $x_1(0), \dots, x_n(0)$ durch eine sinnvoll gewählte Verteilung μ_a , die Bewegung der Kreisscheiben ein stationäres Verhalten zeigt; das heißt, dass ihre Verteilung zu jedem Zeitpunkt die gleiche bleibt. Tatsächlich entspricht μ_a dem gleichmäßigen Maß auf der Menge der Konfigurationen von n Kreisscheiben, durch den *Dichtefaktor* $\exp(-an \mathcal{E}_n(\mathbf{x}))$ verzerrt. In anderen Worten ist die zufällige Position der Kreisscheiben der Verteilung μ_a ein Gleichgewichtszustand unter der Dynamik (*).

Zu diesem Zeitpunkt stellen sich in unserem Gedankengang zwei Fragen, die mit dem Zeitparameter t und mit der Anziehungskraft a verbunden sind.

- Können wir davon ausgehen, dass, wenn wir die Ausgangspositionen der Kreisscheiben deterministisch festlegen $\mathbf{x}(0) = \{x_1(0), \dots, x_n(0)\}$, das System nach einer langen Zeit t den oben beschriebenen Gleichgewichtszustand annimmt? Anders gesagt, gibt es eine Stabilisierung der zufälligen Dynamik der Kreisscheiben zu der wahrscheinlichkeitsverteilung μ_a ?
- Die für die Verteilung μ_a am wahrscheinlichsten Konfigurationen \mathbf{x} sind diejenigen, für die die Dichte $e^{-an \mathcal{E}_n(\mathbf{x})}$ maximal ist, das heißt sie sind Elemente von \mathcal{C}_{min} mit einer minimalen Energie $\mathcal{E}_n(\mathbf{x})$. Können wir davon ausgehen, dass wir die Konfigurationen von \mathcal{C}_{min} erreichen, in dem wir den Anziehungskoeffizienten erhöhen, so dass die Wahrscheinlichkeit jeder suboptimalen Konfiguration vernachlässigbar wird?

Wir beantworten beide Fragen positiv:

Wir legen eine beliebige anfängliche Konfiguration eines Systems mit n Kreisscheiben fest. Wir können dann einen ausreichend großen Anziehungskoeffizienten a wählen, so dass nach der Evolution während ausreichend langer Zeit gemäß der Dynamik (*), das System mit einer

beliebig großen Wahrscheinlichkeit in einer Konfiguration sich befindet, die beliebig nahe von optimalen Konfigurationen ist. Dies wird wie folgt formalisiert. Der Abstand *dist*, der dort vorkommt, wird durch den Unterschied zwischen der Energie der Konfiguration $\mathbf{x}(t)$ und der minimalen Energie gegeben.

Satz 12. *Sei $\mathbf{x}(0)$ eine beliebige Ausgangskonfiguration. Für alle $\varepsilon, \eta > 0$ existiert ein $A > 0$ und ein $T > 0$, so dass für alle $a > A$ und $t > T$,*

$$Wkeit \left(\exists \mathbf{x}_{min} \in \mathcal{C}_{min}, dist(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_{min}) \leq \eta \right) \geq 1 - \varepsilon.$$

Beweis. Wir erweitern die Menge \mathcal{C}_{min} ein wenig, in dem wir auch η -optimale Konfigurationen zulassen:

$$\mathcal{C}_{min}^\eta := \{\mathbf{x} ; \mathcal{E}_n(\mathbf{x}) \leq \mathcal{E}_n(\mathbf{x}_{min}) + \eta\}.$$

Zur Vereinfachung schreiben wir $\underline{\mathcal{E}}_n := \mathcal{E}_n(\mathbf{x}_{min})$.

$$\begin{aligned} \mu_a((\mathcal{C}_{min}^\eta)^c) &= \frac{\int e^{-\frac{an}{2} \mathcal{E}_n(\mathbf{x})} \mathbb{1}_{\mathcal{E}_n(\mathbf{x}) > \underline{\mathcal{E}}_n + \eta} d\mathbf{x}}{\int e^{-\frac{a}{2} n \mathcal{E}_n(\mathbf{x})} d\mathbf{x}} \\ &\leq \frac{\int e^{-\frac{an}{2} (\mathcal{E}_n(\mathbf{x}) - \underline{\mathcal{E}}_n - \eta)} \mathbb{1}_{\mathcal{E}_n(\mathbf{x}) > \underline{\mathcal{E}}_n + \eta} d\mathbf{x}}{\int e^{-\frac{an}{2} (\mathcal{E}_n(\mathbf{x}) - \underline{\mathcal{E}}_n - \eta)} \mathbb{1}_{\mathcal{E}_n(\mathbf{x}) \leq \underline{\mathcal{E}}_n + \eta} d\mathbf{x}} \\ &\leq \frac{1}{\int \mathbb{1}_{\mathcal{E}_n(\mathbf{x}) \leq \underline{\mathcal{E}}_n + \eta} d\mathbf{x}} \int e^{-\frac{an}{2} (\mathcal{E}_n(\mathbf{x}) - \underline{\mathcal{E}}_n - \eta)} \mathbb{1}_{\mathcal{E}_n(\mathbf{x}) > \underline{\mathcal{E}}_n + \eta} d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Dies strebt nach 0, wenn a nach unendlich strebt. Daraus folgt, dass für ein ausreichend großes a die Wahrscheinlichkeit von \mathcal{C}_{min}^η unter μ_a sich 1 mehr und mehr nähert.

Auf der anderen Seite konvergiert für eine Anfangsposition $\mathbf{x}(0)$ und für jede festgelegte Anziehungskraft a die Verteilung des Systems von n Kreisscheiben zur Zeit t nach μ_a , wenn t gegen unendlich geht. Diese intuitive (aber sehr delikate zu beweisen) Stabilisierung wurde in [2] für $n=3$ Kreisscheiben gezeigt. Die Verallgemeinerung für eine beliebige Anzahl n von Kreisscheiben ist das Thema des Artikels [10], der gerade von den Autorinnen M.F. und S.R. geschrieben wird. Es gilt also

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Wkeit(\mathbf{x}(t) \in \mathcal{C}_{min}^\eta) = \mu_a(\mathcal{C}_{min}^\eta).$$

Man erhält das endgültige Resultat in dem man die Stetigkeit der Energie verwendet. Diese impliziert, dass die Menge \mathcal{C}_{min}^η der η -optimalen Konfigurationen sich \mathcal{C}_{min} nähert, wenn η nach 0 geht. \square

Der*Die Leser*in, der*die an der dynamischen Visualisierung der Konvergenz interessiert ist, ist eingeladen, die Webseite http://mfracdon.plil.fr/penny_packing_simulation.html zu besuchen, auf der Simulationen unserer These illustrieren.

Danksagung: Die erste Autorin absolvierte im Mai und Juni 2016 ein Praktikum im mathematischen Institut Paul Painlevé der Université de Lille im Rahmen des Studienvorbereitungs- und Orientierungsjahres ProTechnicale. Einige der vorgestellten Resultate dieses Artikels

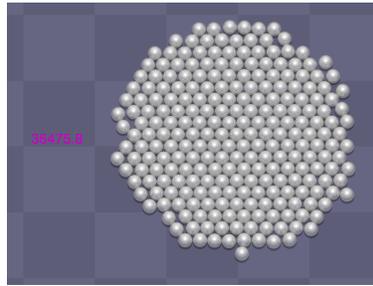


ABBILDUNG 17. Form einer fast-optimalen Konfiguration aus $n = 250$ Kreisscheiben

sind die Ergebnisse dieses Praktikums. Der Forschungsgruppe für Wahrscheinlichkeit und Statistik wird an dieser Stelle für den herzlichen Empfang gedankt.

LITERATUR

- [1] K. Böröczky: Finite packing and covering. *Cambridge tracts in mathematics* 154, Cambridge University Press (2004).
- [2] P. Cattiaux, M. Fradon, A.M. Kulik et S. Röelly: Longtime behaviour of stochastic hard ball systems. *Bernoulli* **22-2** (2016), 681–710
- [3] T. Y. Chow: Reflecting Penny-packings with minimal second moments. *Combinatorica* **15** (1995), 151-158
- [4] J.H. Conway et N.J.A. Sloane: Sphere Packings, Lattices and Groups *Grundlehren der math. Wiss.* 290, Springer-Verlag, Berlin-New-York third ed. (1993).
- [5] J.H. Conway et N.J.A. Sloane: A fast encoding method for lattice codes and quantizers. *IEEE Transactions on Information Theory* **29-6** (1983), 820-824.
- [6] P. Diaconis, G. Lebeau et L. Michel: Geometric analysis for the Metropolis Algorithm on Lipschitz Domains. *Inventiones mathematicae* **185** (2011), 239-281
- [7] M. Fradon: Brownian dynamics of globules. *Electronic Journal of Probability* **15-6** (2010), 142-161
- [8] M. Fradon et S. Röelly: Infinitely many Brownian globules with Brownian radii. *Stochastics and Dynamics* **10-4** (2010), 591-612
- [9] M. Fradon et S. Röelly: Infinite system of Brownian balls with interaction : the non-reversible case. *ESAIM: Probability and Statistics* **11** (2007), 55-79
- [10] M. Fradon et S. Röelly: Brownian dynamics as approximation of the finite packing problem. *Wird zurzeit verfasst* (2018)
- [11] R.L. Graham et N.J.A. Sloane: Penny-packing and two-dimensional codes. *Discrete and Computational Geometry* **5** (1990), 1-11
- [12] J. Karout, E. Agrell, K. Szczerba et M. Karlsson: Optimizing constellations for single-subcarrier intensity-modulated optical systems. *IEEE Transactions on Information Theory* **58-7** (2012), 4645-4659
- [13] Y. Saisho et H. Tanaka: Stochastic Differential Equations for Mutually Reflecting Brownian Balls. *Osaka Journal of Mathematics* **23** (1986), 725-740
- [14] N.J.A. Sloane, R.H. Hardin, T.D.S. Duff et J.H. Conway: Minimal-Energy Clusters of Hard Spheres. *Discrete and Computational Geometry* **14** (1995), 237-259
- [15] N.J.A. Sloane et B.K. Teo: Theta series and magic numbers for close-packed spherical clusters. *Journal of Chemical Physics* **83** (1985), 6520-6534
- [16] A. H. Temesvári: Távolságok hatványösszegének extrémumáról. (Sur les extrema de sommes de puissances de distances). *Matematikai Lapok* **25** (1974), 329-342 (auf Ungarisch).