Mathematik für Wirtschaftsinformatik

Wintersemester 2015/2016 **Prof. Dr. M. Keller**

Blatt 5 **Abgabe 26.11.2015**

(1) Konstruieren Sie Bijektionen zwischen:

(a) Der Menge der geraden Zahlen aus $\mathbb{N}$ und der Menge der ungeraden Zahlen aus $\mathbb{N}$.

(b) Den Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$.

(c) Der Menge $\{f : \{0,1\} \to \mathbb{N}\}$ aller Funktionen von $\{0,1\}$ nach $\mathbb{N}$ und der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(2) Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge. Betrache die Menge

$$\mathrm{B}(M) := \{f : M \to M \mid f \text{ bijektiv}\}$$

der bijektiven Abbildungen von M nach M. Zeigen Sie, dass $(\mathrm{B}(M), \circ)$ eine Gruppe ist, wobei $\circ$ die aus der Vorlesung bekannte Komposition von Abbildungen bezeichne.
Tipps: was ist $f \circ \mathrm{id}_M$? Nutzen Sie zudem die Charakterisierung von Bijektivität mittels Umkehrfunktionen.

Sei auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Äquivalenzrelation

$$(k, l) \sim (m, n) \quad :\Longleftrightarrow \quad k \cdot n = l \cdot m$$

gegeben (siehe Blatt 3). Für $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bezeichne von nun an $[(m, n)]$ die Äquivalenzklasse dieser Äquivalenzrelation.

(3) Zeigen Sie, dass die durch

$$[(k, l)] + [(m, n)] := [(k \cdot n + l \cdot m, l \cdot n)] \quad \text{und}$$
$$[(k, l)] \cdot [(m, n)] := [(k \cdot m, l \cdot n)]$$

definierte Addition und Multiplikation wohldefiniert sind, d.h. nicht von der Wahl der Repräsentanten (k, l) und (m, n) abhängen.

(4) Sei $K = \{[(m,n)] \mid (m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$. Zeigen Sie, dass $(K,\cdot)$ eine Gruppe ist.

Zusatzaufgaben

(Z1) Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge. Betrache die Menge

$$\mathrm{F}(M) := \{f : M \to M\}$$

aller Funktionen von M nach M. Zeigen Sie, dass $(\mathrm{F}(M), \circ)$ eine Halbgruppe, aber im Allgemeinen keine Gruppe ist, wobei $\circ$ die aus der Vorlesung bekannte Komposition von Abbildungen sei.

(Z2) Charakterisieren Sie, unter welchen Bedingungen die Gruppe $(\mathrm{B}(M), \circ)$ aus Aufgabe 2 abelsch ist.