Mathematik für Wirtschaftsinformatik

Wintersemester 2015/2016 **Prof. Dr. M. Keller**

Blatt 4 **Abgabe 19.11.2015**

(1) Seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass für die Urbilder der Mengen $A, B \subseteq Y$ gilt:

$$(a)\ f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$
$$(b)\ f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$
$$(c)\ f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

(2) Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität, Bijektivität und geben Sie gegebenenfalls eine Umkehrabbildung an:

(a) $f : \mathbb{Z}_k \to \mathbb{Z}_k, n \bmod k \mapsto (n+1) \bmod k$, wobei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Hinweis: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass Addition Modulo k wohldefiniert ist. Dies müssen Sie also nicht noch einmal zeigen.

(b) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$.

(3) Sei $M := \{z^2 \mid z \in \mathbb{N}\}$ die Menge der Quadratzahlen. Es seien die folgenden Abbildungen gegeben:

$$f : \mathbb{N} \to M, n \mapsto n^2$$
$$g : M \to \mathbb{N}, n \mapsto \sqrt{n}$$

Bestimmen Sie, falls möglich, die Abbildungen $f \circ g$ und $g \circ f$ und entscheiden Sie, ob beide Abbildungen gleich sind.

(4) Es sei $X := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $Y := \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Weiterhin seien die Abbildungen

$$f : X \to Y, x \mapsto 11 - x,$$
$$g : X \to Y, x \mapsto \begin{cases} 6, & x \leq 2 \\ 10, & x \geq 3 \end{cases},$$
$$h : Y \to X, y \mapsto 11 - y,$$

gegeben.

(a) Untersuchen Sie f, g, h auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(b) Entscheiden (und begründen) Sie, ob die Abbildungen $h \circ f$, $h \circ g$, $f \circ h$ und $g \circ h$ existieren und geben Sie sie gegebenenfalls an.

Zusatzaufgaben

(Z1) Seien A und B endliche Mengen mit gleich vielen Elementen. Weiterhin sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Äquivalenz

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow f \text{ surjektiv}$$

gilt.

(Z2) Seien A und B endliche Mengen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es existiert eine bijektive Abbildung $f : A \to B$.

(ii) A und B haben gleich viele Elemente.

Tipp: Zeigen Sie zuerst die folgenden Aussagen:

(a) Wenn es eine injektive Abbildung von A nach B gibt, so ist die Anzahl der Elemente von A kleiner gleich der Anzahl der Elemente von B und umgekehrt.

(b) Wenn es eine surjektive Abbildung von A nach B gibt, so ist die Anzahl der Elemente von A größer gleich der Anzahl der Elemente von B und umgekehrt.