Analysis auf Graphen

Wintersemester 2015/2016 **Prof. Dr. M. Keller**

Blatt 6 **Abgabe 01.12.2015**

(1) Sei $(\theta_n)_{n\geq\mathbb{N}}$ eine Folge reeller positiver Zufallsvariablen, die endlich viele Werte annehmen und sei $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller positiver unabhängiger exponentiell verteilter Zufallsvariablen mit Parameter 1 die auch unabhängig von θ sind. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $\zeta = \sup_{n\geq 1}(\theta_1\xi_1 + \cdots + \theta_n\xi_n)$ fast sicher $\zeta = \infty$ erfüllt.

(2) Sei (X, m) ein endlicher Maßraum und sei L ein selbstadjungierter Operator auf $\ell^2(X, m)$ mit quadratischer Form Q. Sei λ_0 der kleinste Eigenwert von L. Zeigen Sie

$$\lambda_0 = \inf_{\varphi\in\ell^2(X,m),\|f\|=1} Q(f).$$

(3) Sei $X_n = \{1, \ldots, n\}$, $m \equiv 1$ und (b_n, c_n) der *vollständige Graph* über (X_n, m) mit Standargewichten, d.h. $b_n(x, y) = 1$ falls $x \neq y$, $b(x, y) = 0$, falls $x = y$ und $c_n \equiv 0$, und $L = L_{b_n,c_n,m}$ der dazugehörige Laplaceoperator auf $\ell^2(X, m)$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und geben sie eine orthonormale Basis aus Eigenfunktionen für ein $n \geq 4$ Ihrer Wahl (oder gleich für allgemeine n) an.

(4) Sei (b_n, c_n) der vollständige Graph über (X_n, m) mit Standardgewichten (sh. Aufgabe (3)) und $L = L_{b_n,c_n,m}$ der dazugehörige Laplaceoperator. Sei weiterhin $g(1) = 1$, und $g(k) = 0$, $k = 2, \ldots, n$. Berechnen Sie eine explizite Lösung f der Gleichung

$$(L + 1)f = g$$

für ein $n \geq 4$ Ihrer Wahl (oder gleich für allgemeine n).

Zusatzaufgabe

(Z1) Sei (b_n, c_n) der vollständige Graph über (X_n, m) mit Standardgewichten (sh. Aufgabe (3)) und $L = L_{b_n,c_n,m}$ der dazugehörige Laplaceoperator. Sei weiterhin $g(1) = 1$, $g(2) = -1$ und $g(k) = 0$, $k = 3, \ldots, n$. Berechnen Sie eine explizite Lösung f der Gleichung

$$Lf = g$$

für ein $n \geq 4$ Ihrer Wahl (oder gleich für allgemeine n).