Christian Bär
Bernhard Hanke

Blockseminar im Sommersemester 15
L^2-Invarianten in Geometrie und Topologie

1 Einführung

Wir betrachten Homologiegruppen auf (möglicherweise unendlichen) normalen Überlagerungen kompakter Räume, die mittels quadratsummierbarer Ketten definiert sind. Diese *L^2-Homologie* teilt einerseits viele Eigenschaften der gewöhnlichen Homologie und liefert andererseits relevante Information über die asymptotische Geometrie dieser Räume.
Die bezüglich der Decktransformationsgruppe normalisierte Dimension (*von-Neumann Dimension*) der L^2-Homologie führt auf die *L^2-Bettizahlen*. Im Kontext vollständiger Riemannscher Mannigfaltigkeiten können diese auch auf analytischem Weg über quadratintegrierbare harmonische Formen definiert werden. Der L^2-Indexsatz von Atiyah ist hier von fundamentaler Bedeutung und steht am Anfang der gesamten Theorie.
L^2-Invarianten haben zahlreiche Anwendungen in der Riemannschen Geometrie, der algebraischen Topologie, der geometrischen Gruppentheorie und der Darstellungstheorie.
Unser Seminar stellt die wesentlichen Bausteine dieser Theorie vor und präsentiert einige exemplarische Anwendungen.
Jeder Vortrag dauert 60 Minuten plus Diskussion. Bei den Doppelvorträgen ist eine Absprache bezüglich der Aufteilung erforderlich. Aus Ermangelung einer Tafel werden die Vorträge mit zwei Overheadprojektoren gehalten. Wichtig ist hierbei, dass die Folien nicht vorbereitet mitgebracht werden, sondern, wie an einer Tafel, während des Vortrags live beschrieben werden.
Das Seminar findet im *Landidyll zum alten Schloss* in Kleeberg in Franken statt. Anreise ist am 7.6.2015 zum Abendessen, die Abreise am 12.6.2015 nach dem Mittagessen.

2 Vortragsthemen

0. (Bernhard Hanke) Einführung.

2.1 Algebraischer Zugang

1. (N.N.) Hilbert-$\mathcal{N}(G)$-Moduln.

Es sollen Teile von [L], Abschnitt 1.1.1 bis 1.1.3. vorgestellt werden (vgl. auch [E], Abschnitt 3). Wichtige Aspekte sind: Definition der von-Neumannschen Gruppenalgebra und ihrer Spur ([L], Abschnitt 1.1.1. mit Beispiel 1.4), Diskussion der Hilbert-$\mathcal{N}(G)$-Moduln ([L], Def. 1.5. und 1.6. mit den anschließenden Bemerkungen - für den Vergleich von schwacher und starker Isomorphie siehe auch [E], Lemma 2.5.3.).

2. (N.N.) Von-Neumann-Dimension.

Definition der von-Neumann-Spur für positive Endomorphismen ([L], Def. 1.8. und Theorem 1.9, Teil (1), (3), (5), (6), (8).). Definition der von-Neumann-Dimension von Hilbert-$\mathcal{N}(G)$-Moduln ([L], Def. 1.10. mit Example 1.11 - für den endlich erzeugten Fall vgl. auch [E], Abschnitt 3.3.). Diskussion der wesentlichen Eigenschaften ([L], Theorem 1.12., Teil (1), (2), (6)). Example 1.14. soll ebenfalls besprochen werden.

3. (N.N) Zelluläre L^2-(Ko-)-Homologie.

Definition und erste Eigenschaften von Hilbert-$\mathcal{N}(G)$-Kettenkomplexen, Definition der L^2-Homologie mit (algebraischem) L^2-Hodge-de-Rham-Theorem ([L], Def. 1.15. und 1.16, Lemma 1.18., vgl. auch [E], Abschnitt 2). Diskussion der langen exakten Homologiesequenz [L], Example 1.19. bis Theorem 2.21. Der Beweis dieses Theorem muss geeignet zusammengefasst werden.

4. (N.N) L^2-Bettizahlen.

Wir wenden die bisher eingeführten algebraischen Hilfsmittel auf freie G-CW-Komplexe von endlichem Typ an (dann sind die Randoperatoren im zugehörgen zellulären $\mathcal{N}(G)$-Kettenkomplex beschränkte Operatoren). [L], Abschnitt 1.2.1 soll nur kurz angesprochen werden - mit Erwähnung des klassifizierenden Raumes EG. Abschnitt 1.2.2. in [L] soll ausführlich besprochen werden. In Zusammenhang mit Lemma 1.34. steht die sogenannte „Atiyah-Vermutung“ über mögliche Werte der L^2-Bettizahlen, vgl. [E], Conjecture A auf S. 209.

5. (N.N) Eigenschaften der L^2-Bettizahlen.

Viele Eigenschaften der singulären Homologie gelten analog für L^2-Homologie, siehe [L], Theorem 1.35., wobei die Beweise von Teilen (4), (5), (6), (9) und (10) ausgelassen, bzw. nur kurz skizziert werden können (unter eventuellem Rückgriff auf [L], Theorem 1.12. (5), Lemma 1.22. und Lemma 1.24.). Beispiele 1.36., 1.37. und 1.38. sollen ausführlich besprochen werden.

2.2 Analytischer Zugang

6. (N.N.) Analytische Definition der L^2-Kohomologie

Wir arbeiten auf einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit M und definieren L^2-de Rham-Kohomologie wie in [L], Def. 1.71. (für uns ist nur der reduzierte Fall interessant). Diskussion harmonischer Formen und der L^2-Hodge-de-Rham-Zerlegung wie in [L], Abschnitt 1.3.1. (vgl. auch [dR]). Auf den Beweis der Glattheit L^2-harmonischer Formen mittels elliptischer Regularität soll kurz eingegangen werden. Beweis von Theorem 1.57. und von Lemma 1.72. in [L]

7. (N.N.) Der L^2-Indexsatz von Atiyah: Einführung und Vorbereitung des Beweises.

Quelle: [A], Abschnitt 1 und 2. Kurze Erinnerung an den Atiyah-Singer-Indexsatzes für kompakte Mannigfaltigkeiten und Lösung des Indexproblems mittels Parametrizes. Multiplikativität des Index unter endlichen Überlagerungen. Definition des Γ-Index ($\Gamma = G$). Interpretation als von-Neumann-Dimension (vgl. Vortrag 2). Formulierung des L^2-Indexsatzes. Erste Anwendung: Gleichheit von L^2-Eulercharakteristik (definiert durch Wechselsumme der von-Neumann-Dimensionen der Räume harmonischer Formen) mit der gewöhnlichen Eulercharakteristik des Quotienten. Beweisidee und Grundlagen zu Kern-Funktionen.

8. + 9. Der L^2-Indexsatz von Atiyah: Abschluss des Beweises.

Literatur: [A], Abschnitte 3.-5. Der Beweis soll in passender Weise zusammengefasst werden. Propositionen 3.1 und 4.16 werden auch im nächsten Vorträgen benötigt und sollen entsprechend herausgestellt werden. Prop 4.16. entspricht Lemma 1.70. (2) in [L]

10. Spektraldichte, Wärmekern und L^2-Bettizahlen.

Ziel ist der Beweis von Formel 0.18. auf Seite 5 in [L]. Der Beweis beruht auf der Laplace-Transformierten der spektralen Dichtefunktion für den Laplaceoperator Δ_p auf p-Formen, siehe den Beweis von Lemma 3.138 in [L] und das folgende Lemma 3.139 (4). Der Vortrag kann folgendermaßen aufgebaut werden: Sei (E_λ) die Spektralfamilie für den selbstadjungierten Abschluss von Δ_p als unbeschränkter, dicht definierter Operator auf $L^2(\Omega^p(M))$ (vgl. [L], S. 54 ff.). Die Projektionen E_λ auf den spektralen Anteil $[0, \lambda]$ von Δ_p sind durch glatte Kerne darstellbar (Elemente im Bild von E_λ liegen im Definitionsbereich von Δ_p^j für alle j und sind somit glatt) und definieren daher (vgl. [L], Lemma 1.70. (2) aus dem vorigen Vortrag) eine spektrale Dichtefunktion $F_p^{\Delta}(M) : [0, \infty) \to [0, \infty)$ wie in [L], S. 71 oben (vgl. auch [L], Def. 2.7). Nach kurzer Wiederholung der wichtigsten Eigenschaften des Wärmekerns für Δ_p auf vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten [Gr] (Existenz, Eindeutigkeit, Halbgruppeneigenschaft, Glattheit) kann (wieder mittels [L], Lemma 1.70 (2)) die $\mathcal{N}(G)$-Spur von $e^{-t\Delta_p}$ mit dem Integral der Spur des Wärmekerns über einen Fundamentalbereich identifiziert werden. Für die Vertauschbarkeit von Spurbildung und Integral (zweite Gleichheit im Beweis von [L], Lemma 3.138) siehe Formel (1.65) aus [L]. Der Zusammenhang zur Definition der $\mathcal{N}(G)$-Dimension aus Vortrag 2 sollte explizit gemacht werden.

11. + 12. L^2-Hodge de-Rham Theorem

Hier werden die algebraische und analytische Beschreibung der L^2-Invarianten zusammengeführt. Die Originalarbeit [D] ist sehr gut lesbar und soll in zwei Vorträgen vorgestellt werden. Vergleiche auch den Beweis von [L], Theorem 1.59. in [L], Abschnitt 1.4. Anwendung: Die Singer- (und damit die Hopf-)Vermutung für geschlossene hyperbolische Mannigfaltigkeiten, siehe [L], Theorem 1.62., und [D2].

2.3 Anwendungen

13. + 14. Defizienz von Gruppen und Eulercharakteristik von Viermannigfaltigkeiten.

Es sollen die Ergebnisse von [L2], Abschnitt 5. und 6. vorgestellt werden (insb. Theoreme 4.1, 5.1 und 6.1.3), vgl. auch [L], Abschnitt 7.3.1. (Allgemeine Bemerkungen zur Defizienz von Gruppen) und [L], Theorem 7.25. Letzteres Ergebnis ist allgemeiner als die Resultate [L2], die für unsere Zwecke ausreichen - in diesem Zusammenhang kann kurz auf die entsprechenden Resultate in [L] Abschnitt 6.5 (L^2-Bettizahlen für beliebige G-Räume) eingegangen werden. Siehe auch [E], Abschnitt 4.1

15. Eulercharakteristik amenabler Gruppen.

Literatur: [E], Abschnitt 4.2 bis Cor. 4.3.4. Siehe auch [L], Cor. 6.75. Dieses Resultat verzichtet auf die Voraussetzung, dass BG von endlichem Typ ist (vgl. die entsprechende Bemerkung in vorigen Vortrag).

16. Asphärische Räume.

Literatur: [L], Vorbereitende Bemerkungen in Abschnitt 0.9. Die Ergebnisse in Abschnitt 1.2.4. (asphärische Mannigfaltigkeiten mit S^1-Wirkung - siehe Cor. 1.43.) sollen ausführlich dargestellt werden. Theorem 1.44. braucht nur für π_1 amenabel formuliert werden und folgt dann direkt aus Vortrag 13.

Literatur:

[D] J. Dodziuk, *De Rham-Hodge theory for L^2-cohomology of infinite coverings*, Topology **16** (1977), 157–165.

[D2] J. Dodziuk, *L^2-harmonic forms on rotationally symmetric Riemannian manifolds*, Proc. AMS **77** (3) (1979), 395–400.

[E] B. Eckmann, *Introduction to L^2-methods in topology: Reduced L^2-homology, harmonic chains, L^2-Betti numbers*, Israel J. of Math. **117** (2000), 183–219.

[Gr] A. Grigor'yan, *Heat kernels and analysis on manifolds*, AMS/IP Studies in Advanced Matghematics, AMS 2009.

[L] W. Lück, *L^2-invariants: Theory and applications to geometry and K-theory*, Ergebniss der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **44**, Springer-Verlag.

[L2] W. Lück, *L^2-Betti numbers of mapping tori and groups*, Topology **33** (2) (1994), 203–214.

[dR] G. de Rham, *Differentiable manifolds*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **266**, Springer-Verlag.

[R] J. Roe, *Elliptic operators, topology and asymptotic methods*, Second Edition, Chapman & Hall.