Elliptische Operatoren
und
Darstellungstheorie
kompakter Gruppen

Habilitationsschrift

zur

Erlangung der venia legendi

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität

Bonn

vorgelegt von

Christian Bär

Bonn, April 1993

Vorwort und Einleitung

Es ist wohlbekannt, daß es vielfältige Beziehungen zwischen Topologie, Geometrie und Analysis einer Mannigfaltigkeit gibt. In der vorliegenden Arbeit sollen Teilaspekte hiervon untersucht werden. Eine wichtige globale topologische Invariante einer Mannigfaltigkeit ist ihre Strukturgruppe, die wir im Folgenden stets mit G bezeichnen wollen. Für die Analysis bedeutsam sind die elliptischen Operatoren, die auf Schnitten in gewissen Vektorbündeln wirken. Welche elliptischen Operatoren es gibt, hängt von der Strukturgruppe G ab. So folgt z.B. aus dem Thom-Isomorphismus in der K-Theorie, daß auf Spin-Mannigfaltigkeiten, d.h. $G = Spin(n)$, alle elliptischen Operatoren bis auf Homotopie getwistete Dirac-Operatoren sind. Wir werden diese Beziehung zwischen Strukturgruppe und elliptischen Operatoren systematisch studieren.

Die Strukturgruppe tritt stets zusammen mit einer orthogonalen Darstellung $\tau : G \to O(n)$ auf, die dann das Tangentialbündel der Mannigfaltigkeit induziert. Wir verlangen, daß G vermöge τ transitiv auf der Einheitssphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ operiert. Diese Voraussetzung besagt, daß die Strukturgruppe nicht zu klein ist, oder polemisch ausgedrückt, daß sie nicht zu pathologisch ist. Die meisten relevanten Strukturgruppen erfüllen diese Bedingung, etwa $G = O(n)$ (Riemannsche Mannigfaltigkeiten), $G = SO(n)$ (orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten), $G = Spin(n)$ (Spin-Mannigfaltigkeiten), $G = U(m)$ (fast-komplexe Mannigfaltigkeiten) und viele mehr.

Zu einem einmal fest gewählten Punkt $x_0 \in S^{n-1}$ betrachten wir die Isotropieuntergruppe $H = \{g \in G \mid \tau(g)x_0 = x_0\}$. Die zentrale Beobachtung ist nun die folgende: Sind V_1 und V_2 zwei G-Moduln, die aufgefaßt als H-Moduln äquivalent sind, dann gibt es zwischen den beiden assoziierten Vektorbündeln einen elliptischen Pseudodifferentialoperator (Satz 1.1).

Im allgemeinen ist es nicht möglich, auch einen elliptischen Differentialoperator zu finden; dafür geben wir ein einfaches Beispiel an (Beispiel 1.7), bei dem die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit der komplex-projektive Raum $\mathbb{CP}^2$ ist. Allerdings kann man durch K-theoretisch triviale Operationen, nämlich Addition und Subtraktion derselben G-Moduln von V_1 und V_2, erreichen, daß es auch einen elliptischen Differentialoperator erster Ordnung gibt (Satz 1.9).

Algebraisch ist es sehr viel günstiger statt mit echten G-Moduln mit formalen Differenzen, den virtuellen G-Moduln, zu arbeiten. Wir betrachten also die Differenz $V_1 - V_2$ als Element des Darstellungsringes $R(G)$. Die Bedingung aus Satz 1.1 lautet nun einfach, daß $V_1 - V_2$ unter der Einschränkungsabbildung $R(G) \to R(H)$ auf 0 geht. Wir sehen, daß wir den Kern $R(G, H)$ dieser Abbildung studieren müssen. Man könnte sagen, daß $R(G, H)$ die Homotopieklassen der zu G natürlich assoziierten elliptischen Operatoren parametrisiert. Dem Sachverhalt, daß $R(G, H)$ ein Ideal in $R(G)$ ist, entspricht die Tatsache, daß man diese Operatoren mit beliebigen G-Moduln twisten kann.

Im zweiten Abschnitt berechnen wir für zahlreiche Gruppen G das Ideal $R(G, H)$, genauer geben wir Erzeuger an. Die diesen Erzeugern entsprechenden Operatoren kann man mit gutem Recht als die für die Strukturgruppe G fundamentalen Operatoren ansehen. Unnötig zu erwähnen, daß im Fall $G = Spin(2m)$ der Dirac-

Operator der fundamentale Operator ist. Im Fall $G = SO(2m)$ haben wir zwei fundamentale Operatoren, nämlich den Euler-Operator und den Signatur-Operator. Für die weiteren Gruppen siehe die Tabellen am Ende des zweiten Kapitels.

Hat man einen elliptischen Operator, so kann man seinen Index mit dem Satz von Atiyah und Singer durch einen topologischen Ausdruck berechnen. Insbesondere muß dieser topologische Ausdruck eine ganze Zahl sein. Im dritten Kapitel kombinieren wir den Indexsatz mit unserem Existenzsatz für elliptische Operatoren und erhalten einen allgemeinen Ganzzahligkeitssatz für Mannigfaltigkeiten mit Strukturgruppe G (Satz 3.5).

Bei geeigneten Positivitätsannahmen an die Krümmung kann man unter Benutzung der Bochner-Technik erreichen, daß dieser topologische Ausdruck nicht nur ganz ist, sondern sogar verschwindet. Wir formulieren einen Verschwindungssatz für getwistete Dirac-Operatoren (Satz 3.6), wobei das Neue dabei eine Abschwächung der Positivitätsvoraussetzung ist. Dazu führen wir für eine reell-wertige Funktion f auf der Mannigfaltigkeit die Invarinate $\mu(f)$ ein, die als der kleinste Eigenwert des Operators $4\frac{n-1}{n-2}\triangle + f$ definiert ist, wobei $\triangle$ der übliche Laplace-Beltrami-Operator ist. Ist nun f der entsprechende Krümmungsausdruck, dann findet man in der Literatur in den Verschwindungssätzen die punktweise Positivitätsvoraussetzung $f > 0$ oder $f \geq 0$ und $f \not\equiv 0$. Wir verlangen nur $\mu(f) > 0$. Ist z.B. $f \geq 0$ und $f \not\equiv 0$, dann gilt auch $\mu(f) > 0$ und wir haben immer noch die Möglichkeit ein wenig an der Funktion f zu wackeln, ohne die Voraussetzung $\mu(f) > 0$ zu zerstören, d.h. f darf auch ein bißchen negativ sein.

In den darauffolgenden Kapiteln werden diese allgemeinen Sätze auf spezielle Gruppen angewandt. Im vierten Abschnitt betrachten wir die Gruppen $G = Spin(n)$ und $G = Spin^c(n)$. Dieser Abschnitt dient in erster Linie der Illustration unserer Methode. Bis auf besagte Abschwächung der Positivitätsvoraussetzung in den Verschwindungssätzen erhalten wir nur bekannte Resultate von Atiyah, Hirzebruch, Lichnerowicz und Hitchin. Interessanter wird es im fünften Kapitel, wo wir die Klasse der Spin^h-Mannigfaltigkeiten einführen. Ähnlich wie die Spin^c-Mannigfaltigkeiten die Spin-Mannigfaltigkeiten und die fast-komplexen Mannigfaltigkeiten zu einer Klasse zusammenfassen, bilden die Spin^h-Mannigfaltigkeiten die natürliche Vereinigung der Spin^c-Mannigfaltigkeiten und der fast-quaternionischen Mannigfaltigkeiten. Wir diskutieren für diese sehr große Klasse von Mannigfaltigkeiten die entsprechenden Ganzzahligkeits- und Verschwindungssätze. Wir beschließen dieses Kapitel mit einem kurzen Studium des Twistorraumes solcher Spin^h-Mannigfaltigkeiten.

Im sechsten Kapitel untersuchen wir fast-quaternionische Mannigfaltigkeiten und im letzten Kapitel schließlich wird demonstriert, wie man mit unseren Methoden Immersionen untersuchen kann. Wir geben einen allgemeinen Ganzzahligkeitssatz für Mannigfaltigkeiten mit einer G^1-Struktur an, die in eine Spin-Mannigfaltigkeit (z.B. $\mathbb{R}^N$) immersiert werden können, so daß das Normalenbündel eine G^2-Struktur trägt. Dies verallgemeinert ein bekanntes Resultat von K.H. Mayer, der den Fall $G^1 = SO(n)$ und $G^2 = SO(k)$ betrachtet hat. Wir haben also Ganzzahligkeitsresultate z.B. für fast-quaternionische Mannigfaltigkeiten, die mit einem komplexen Normalenbündel in eine Spin-Mannigfaltigkeit immersiert werden können.

Es stellt sich bei allen Anwendungen heraus, daß es sehr nützlich ist, nicht jedesmal geeignete elliptische Operatoren mühsam von Hand konstruieren zu müssen. Der gar nicht schwierig zu beweisende Satz 1.1 erlaubt es letztlich, zahlreiche bekannte Einzelresultate in einen Zusammenhang zu stellen, und auch allerlei Neues herzuleiten.

Zahlreichen Mathematikern bin ich für Diskussionen und Hinweise zu Dank verpflichtet. Es seien hier nur W. Ballmann, D. Gromoll, G. Höhn, B. Lawson, C. Lebrun, K. Ono und A. Swann genannt. Besonderer Dank geht auch an die DFG, die es mir durch ein Forschungsstipendium ermöglicht hat, ein Jahr an der State University of New York at Stony Brook zu verbringen.

Inhalt

1. Elliptische Operatoren

Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, G eine Lie-Gruppe, $\mathcal{P}$ ein G-Prinzipalbündel über M und V ein G-Modul über $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$. Dann operiert G in natürlicher Weise auf $\mathcal{P} \times V$, und der Quotient, den wir mit $\mathcal{P} \times_G V$ bezeichnen, ist ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel über M. Für die Äquivalenzklasse eines Paares (b, v) schreiben wir $[b, v]$. Wir nennen das Tripel $(\mathcal{P}, G, V)$ eine *G-Struktur von M*, falls $V = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{P} \times_G \mathbb{R}^n = TM$, dem Tangentialbündel von M. Die G-Struktur heißt *transitiv*, falls die Darstellung von G auf $\mathbb{R}^n$ orthogonal ist, und G auf $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ transitiv operiert. Insbesondere ist dann auf M eine Riemannsche Metrik gewählt.

Von jetzt ab sei $(\mathcal{P}, G, \mathbb{R}^n)$ eine transitive G-Struktur von M. Wollen wir die Operation von G auf $\mathbb{R}^n$ genauer spezifizieren, so geben wir den Homomorphismus $\tau : G \to O(n)$ mit an und schreiben $(\mathcal{P}, G, \mathbb{R}^n, \tau)$. Seien nun V_1 und V_2 zwei weitere G-Moduln über $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$. Wir wollen die Frage untersuchen, wann es einen elliptischen Operator von den glatten Schnitten in dem zu V_1 assoziierten Vektorbündel E_1 auf diejenigen des zu V_2 gehörigen Bündels E_2 gibt. Eine notwendige Bedingung ist sicherlich, daß E_1 und E_2 und damit V_1 und V_2 denselben Rang haben. Man könnte das auch kompliziert so ausdrücken, daß die Einschränkung von V_1 und V_2 auf die triviale Untergruppe von G äquivalent sein müssen.

Um eine hinreichende Bedingung für die Existenz elliptischer Operatoren zu erhalten, müssen wir eine weniger brutale Einschränkung betrachten. Sei dazu $x_0 \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, und sei H die zugehörige Isotropieuntergruppe von G, d.h. $H = \{g \in G \mid gx_0 = x_0\}$. Wegen der Transitivität der Operation von G auf S^{n-1} ist H bis auf Konjugation eindeutig bestimmt. Die entscheidende Bedingung, die wir jetzt verlangen, ist die, daß V_1 und V_2 als H-Moduln äquivalent sind. Es gebe also einen H-Modulisomorphismus $A : V_1 \to V_2$.

Sei nun X ein Tangentialvektor der Länge 1 und $\nu \in E_1$. X und ν sollen denselben Basispunkt in M haben. Wir schreiben $X = [b, gx_0]$ und $\nu = [b, v], b \in \mathcal{P}, g \in G, v \in V_1$. Nun definieren wir $\sigma_X(\nu) = [b, gAg^{-1}v]$. Eine einfache Rechnung zeigt, daß die Definition nicht von der Wahl von b abhängt. Da A ein H-Modulhomomorphismus ist, kann man auch leicht sehen, daß σ_X nicht von der Wahl von g, sondern nur von X abhängt. Damit ist σ ein wohldefinierter Schnitt in dem Bündel $Hom(\pi^* E_1, \pi^* E_2)$. Dabei ist $\pi : T^1M \to M$ die Bündelprojektion des Sphärenbündels im Tangentialbündel. Darüberhinaus ist für jedes feste X $\sigma_X : (\pi^* E_1)_X \to (\pi^* E_2)_X$ ein Isomorphismus. Damit ist σ im wesentlichen ein elliptisches Symbol; genauer, ist eine Ordnung k vorgegeben, so können wir σ durch $\sigma_{tX} = t^k \cdot \sigma_X$ für $t \geq 1$ und $\sigma_{tX} =$ irgendwas für $0 \leq t < 1$ auf ganz TM fortsetzen und erhalten ein elliptisches Symbol der Ordnung k.

Wir bezeichnen den Raum der Pseudodifferentialoperatoren der Ordnung k mit ΨDO_k und den der klassischen Pseudodifferentialoperatoren mit ΨCO_k. Dabei sind die klassischen Pseudodifferentialoperatoren gerade diejenigen, deren Symbol der Homogenitätsbedingung $\sigma_{tX} = t^k \cdot \sigma_X$ außerhalb einer beschränkten Umgebung des Nullschnitts in TM genügen. Für jedes k haben wir die exakte Sequenz

$$0 \to \Psi DO_{k-1}(E_1, E_2) \to \Psi CO_k(E_1, E_2) \to C^\infty(Hom(\pi^* E_1, \pi^* E_2)) \to 0, \qquad (1)$$

wobei der Pfeil $\Psi CO_k(E_1, E_2) \to C^\infty(Hom(\pi^* E_1, \pi^* E_2))$ einen Operator auf sein (asymptotisches)Hauptsymbol abbildet, siehe etwa [15, S. 245].

Der langen Rede kurzer Sinn ist, daß wir zu dem oben konstruierten σ einen klassischen Pseudodifferentialoperator beliebiger Ordnung k finden können, dessen Hauptsymbol die homogene Fortsetzung von σ ist. Dieser Operator ist elliptisch und eindeutig bis auf Operatoren der Ordnung $k-1$.

Wir fassen zusammen

Satz 1.1. *Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $(\mathcal{P}, G, \mathbb{R}^n)$ eine transitive G-Struktur auf M, $x_0 \in S^{n-1}$ und H die zu x_0 gehörige Isotropieuntergruppe von G. Ferner seien V_1 und V_2 zwei G-Moduln, deren Einschränkung auf H äquivalent sind. Mit E_i bezeichnen wir das zu $\mathcal{P}$ und V_i assoziierte Vektorbündel.*

Dann gibt es einen elliptischen klassischen Pseudodifferentialoperator $C^\infty(M, E_1) \to C^\infty(M, E_2)$ von beliebiger Ordnung. □

Bemerkung 1.2. Sind die V_i komplexe Moduln vom reellen oder quaternionischen Typ, d.h. gibt es auf V_i G-äquivariante konjugiert-lineare Endomorphismen J_i mit $J_i^2 = id$ bzw. $J_i^2 = -id$, dann besitzen auch die Bündel E_i Endomorphismenfelder $\mathcal{J}_i$, definiert durch $\mathcal{J}_i[b, v] = [b, J_i v]$. Wenn wir in Satz 1.1 voraussetzen, daß der H-Modulisomorphismus $A : V_1 \to V_2$ mit den J_i verträglich ist, d.h. $A \circ J_1 = J_2 \circ A$, dann kann auch der elliptische Operator so gewählt werden, daß er mit den $\mathcal{J}_i$ verträglich ist.

Satz 1.1 ist als ein Rezept aufzufassen, das angibt, wie man aus der Strukturgruppe G einer Mannigfaltigkeit die zur G-Struktur gehörenden natürlichen elliptischen Operatoren finden kann. Wir werden im zweiten Kapitel systematisch Beispiele studieren; zur Illustration seien hier aber schon zwei besonders einfache Beispiele gegeben.

Beispiel 1.3. Sei M eine Spin-Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 2m$. Dann ist $G = Spin(2m)$ und $H = Spin(2m-1)$. Wir wählen $V_1 = \Sigma^+$ und $V_2 = \Sigma^-$ die G-Moduln der positiven bzw. negativen Spinoren. Unter der Einschränkung auf H gehen beide Darstellungen auf die Spinordarstellung Σ von H. Daher sind die Voraussetzungen von Satz 1.1 erfüllt und wir erhalten elliptische Operatoren $C^\infty(M, \Sigma^+) \to C^\infty(M, \Sigma^-)$. Hier können wir, wenn wir Ordnung $k = 1$ betrachten, den *Dirac*-Operator nehmen.

Beispiel 1.4. Sei M eine orientierte 4-Mannigfaltigkeit. Dann ist $G = SO(4)$ und $H = SO(3)$. Wir wählen $V_1 = \Lambda^1 = \Lambda^1\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4$ und $V_2 = 1 + \Lambda^2_+$. Dabei ist 1 der triviale G-Modul $\mathbb{R}$ und Λ^2_+ der Modul der selbstdualen 2-Formen. Schränken wir $V_1 = \Lambda^1\mathbb{R}^4$ auf H ein, so zerfällt V_1 in den trivialen von x_0 aufgespannten Unterraum und in dessen Komplement, d.h. $V_1|H = 1 + \Lambda^1\mathbb{R}^3$. Die Einschränkung von Λ^2_+ ist gerade $\Lambda^1\mathbb{R}^3$. Es gilt also $V_1|H = V_2|H = 1 + \Lambda^1\mathbb{R}^3$. In diesem Fall liefert uns Satz 1.1 den halben *Euler*-Operator $d^+ + \delta : C^\infty(M, \Lambda^1) \to C^\infty(M, 1 + \Lambda^2_+)$.

In beiden Beispielen konnten wir für den elliptischen Operator einen *Differential*operator nehmen. Es drängt sich hier die Frage auf, ob dies einen allgemeinen Sachverhalt widerspiegelt.

Frage: Kann man in Satz 1.1 das Wort Pseudodifferentialoperator durch das Wort Differentialoperator ersetzen?

Wir werden gleich sehen, daß die Antwort hierauf i.a. nein lautet. Dazu leiten wir topologische Hindernisse gegen die Existenz elliptischer Differentialoperatoren her. Die Symbole von Differentialoperatoren haben zusätzliche Symmetrieeigenschaften, die wir hier nutzen können.

Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, E und F seien reelle Vektorbündel über M. In Satz 1.1 haben wir auch komplexe und quaternionale Vektorbündel betrachtet. Für unsere jetzige Betrachtung vergessen wir dann einfach die komplexe bzw. quaternionale Struktur. Sei wieder $\pi : T^1M \to M$ das Sphärenbündel, und $\pi_1 : PM = T^1M/\mathbb{Z}_2 \to M$ das zugehörige reell-projektive Bündel. Aus dem Leray-Hirsch-Theorem folgt (vgl. [14, S. 233*f*])

$$H^*(PM; \mathbb{Z}_2) \cong H^*(M; \mathbb{Z}_2)[\omega]/(\sum_{k=0}^{n} \omega^k w_{n-k}(M)), \tag{2}$$

wobei $w(M) = 1 + w_1(M) + \cdots + w_n(M)$ die Stiefel-Whitney-Klasse von M ist, und ω die erste Stiefel-Whitney-Klasse des tautologischen Hopf-Bündels L über PM. Dabei wird $H^*(M; \mathbb{Z}_2)$ vermöge π_1^* in $H^*(PM; \mathbb{Z}_2)$ eingebettet.

Sei nun $D : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$ ein elliptischer Differentialoperator *gerader* Ordnung. Das Symbol $\sigma(D)$ ist eine Äquivalenz von π^*E nach π^*F. Weil die Ordnung gerade ist, gilt $\sigma_X(D) = \sigma_{-X}(D)$ für alle X. Somit erhalten wir eine Äquivalenz $\tilde{\sigma}(D) : \pi_1^*E \to \pi_1^*F$. Es folgt für die Stiefel-Whitney-Klassen

$$\pi_1^* w(E) = w(\pi_1^*E) = w(\pi_1^*F) = \pi_1^* w(F). \tag{3}$$

Da π_1^* injektiv ist, haben wir gezeigt

Satz 1.5. *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, seien E und F reelle Vektorbündel über M. Wenn es einen elliptischen Differentialoperator $C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$ von gerader Ordnung gibt, dann stimmen die Stiefel-Whitney-Klassen von E und F überein*

$$w(E) = w(F). \square$$

Sei jetzt $D : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$ ein elliptischer Differentialoperator *ungerader* Ordnung. Dann liefert das Symbol $\sigma(D)$ eine Äquivalenz $\pi^*E \to \pi^*F$ mit der Symmetrieeigenschaft $\sigma_{-X}(D) = -\sigma_X(D)$. Dies induziert eine Äquivalenz $\tilde{\sigma}(D) : \pi_1^*E \to \pi_1^*F \otimes L$. Insbesondere gilt

$$w(\pi_1^*E) = w(\pi_1^*F \otimes L). \tag{4}$$

Wir schreiben jetzt formal

$$w(\pi_1^* E) = \prod_i (1 + x_i),$$

$$w(\pi_1^* F) = \prod_i (1 + y_i), \; x_i, y_i \in H^1(M; \mathbb{Z}_2).$$

Jetzt schreibt sich (4)

$$\prod_i (1 + x_i) = \prod_i (1 + y_i + \omega). \tag{5}$$

Schreiben wir ferner $w(M) = \prod_j (1 + z_j), z_j \in H^1(M; \mathbb{Z}_2)$, dann besagt die Relation in $H^*(PM; \mathbb{Z}_2)$

$$\prod_{j=1}^{n} (\omega + z_j) = 0. \tag{6}$$

Wir fassen zusammen

Satz 1.6. *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, seien E und F reelle Vektorbündel über M. Wenn es einen elliptischen Differentialoperator $C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$ von ungerader Ordnung gibt, dann gilt*

$$w(\pi_1^* E) = w(\pi_1^* F \otimes L).$$

Wir haben also die Relationen

$$\prod_i (1 + x_i) = \prod_i (1 + y_i + \omega)$$

und

$$\prod_{j=1}^{n} (\omega + z_j) = 0.$$

Dabei sind $w(E) = \prod_i (1 + x_i), w(F) = \prod_i (1 + y_i), w(M) = \prod_j (1 + z_j), x_i, y_i, z_j \in H^1(M; \mathbb{Z}_2)$, die üblichen formalen Aufspaltungen. □

Betrachten wir als Beispiel eine orientierte zusammenhängende 4-Mannigfaltigkeit M. Wir setzen $E' = \mathbb{R} \oplus \Lambda_+^2 T^*M$ und $F' = T^*M$. Dabei bezeichnet $\mathbb{R}$ das triviale Geradenbündel. Ferner definieren wir $E = E' \oplus \mathbb{R}$ und $F = F' \oplus \mathbb{R}$. Man sieht wie in Beispiel 1.4, daß es einen elliptischen Pseudodifferentialoperator $C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$ gibt. Wir werden zeigen, daß die Existenz eines elliptischen Differentialoperators $C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$ die topologische Bedingung $w_4(M) = 0$ zur Folge hat.

Zunächst einmal existiert der elliptische Differentialoperator erster Ordnung $d + \delta^+ : C^\infty(M, E') \to C^\infty(M, F')$. Also ist nach Satz 1.6 $w(\pi_1^* E') = w(\pi_1^* F' \otimes L)$. Wir nehmen nun an, daß es einen elliptischen Differentialoperator ungerader Ordnung $D : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$ gibt. Dann folgt

$$w(\pi_1^* E') \quad = \quad w(\pi_1^* E' \oplus \mathbb{R}) \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &= w(\pi_1^* E) && (8)\\ &= w(\pi_1^* F \otimes L) && (9)\\ &= w(\pi_1^* F' \otimes L \oplus L) && (10)\\ &= w(\pi_1^* F' \otimes L) \cdot (1+\omega). && (11)\end{aligned}$$

Kürzen von $w(\pi_1^* E') = w(\pi_1^* F' \otimes L)$ liefert $\omega = 0$. Also folgt

$$w_4(M) = \prod_j z_j = \prod_j (\omega + z_j) = 0. \tag{12}$$

Jetzt nehmen wir an, daß es einen elliptischen Differentialoperator gerader Ordnung $D : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$ gibt. Gemäß Satz 1.5 gilt $w(E) = w(F)$ und somit $w(E') = w(F')$. Andererseits wissen wir $w(\pi_1^* E') = w(\pi_1^* F' \otimes L)$. Daraus folgt

$$w(\pi_1^* F') = w(\pi_1^* F' \otimes L). \tag{13}$$

Da $F' = T^*M \cong TM$ ist, schreibt sich (13)

$$\prod_j (1 + z_j) = \prod_j (1 + z_j + \omega). \tag{14}$$

Indem wir den Term der Ordnung 4 aus (14) herausfiltern, erhalten wir $\prod_j z_j = \prod_j (z_j + \omega) = 0$ und damit $w_4(M) = 0$.

Wir haben also gezeigt: Gibt es auf M einen elliptischen Differentialoperator $C^\infty(M, \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \Lambda^2_+ T^*M) \to C^\infty(M, \mathbb{R} \oplus T^*M)$, dann ist $w_4(M) = 0$.

Beispiel 1.7. Über $M = \mathbb{CP}^2$ gibt es keinen elliptischen Differentialoperator $C^\infty(\mathbb{CP}^2, \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \Lambda^2_+ T^*\mathbb{CP}^2) \to C^\infty(\mathbb{CP}^2, \mathbb{R} \oplus T^*\mathbb{CP}^2)$, denn $w_4(\mathbb{CP}^2) \neq 0$, wohl aber einen elliptischen Pseudodifferentialoperator.

Man kann also in Satz 1.1 das Wort Pseudodifferentialoperator nicht so ohne weiteres durch Differentialoperator ersetzen. Zum Schluß dieses ersten Kapitels wollen wir sehen, daß man es in gewisser Hinsicht doch kann. In obigem Beispiel gibt es keinen elliptischen Differentialoperator $C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$, wohl aber gibt es einen von $C^\infty(M, E')$ nach $C^\infty(M, F')$. E und F entstehen aus E' und F' durch Addition *desselben* Bündels $\mathbb{R}$. Die formalen Differenzen $E - F$ und $E' - F'$ stimmen also überein. Wir werden zeigen, daß man nach Addition und Subtraktion geeigneter Darstellungen auf beiden Seiten stets Differentialoperatoren erster Ordnung erhält.

Sei nun M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, G eine kompakte zusammenhängende Lie-Gruppe, $(\mathcal{P}, G, \mathbb{R}^n)$ eine transitive G-Struktur von M. Insbesondere sind damit auf M eine Riemannsche Metrik und eine Orientierung gewählt. Seien ferner V_1 und V_2 komplexe G-Moduln, deren Einschränkung auf die Isotropieuntergruppe H zu $x_0 \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Anders ausgedrückt heißt das, daß die Differenz $V_1 - V_2$ im Kern der Einschränkungsabbildung der Darstellungsringe (Charakterringe) $R(G) \to R(H)$ liegt. Diesen Kern bezeichnen wir mit $R(G, H)$. Wir haben also per definitionem die exakte Sequenz

$$0 \to R(G, H) \to R(G) \to R(H). \tag{15}$$

Analog haben wir den reellen Darstellungsring $RO(G)$ und den Kern $0 \to RO(G,H) \to RO(G) \to RO(H)$ sowie die quaternionische Darstellungsgruppe $RSP(G)$ und $0 \to RSP(G,H) \to RSP(G) \to RSP(H)$.

Lemma 1.8. *Man kann jedes Element aus $R(G,H)$ so als $V_1 - V_2$ schreiben, V_i komplexe G-Moduln, daß es G-äquivariante Projektionen $p_1 : \mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} V_1 \to V_2$ und $p_2 : \mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} V_2 \to V_1$ gibt, so daß $A_i v = p_i(x_0 \otimes v)$, $A_1 : V_1 \to V_2$, $A_2 : V_2 \to V_1$, Isomorphismen sind.*

Das in Lemma 1.8 konstruierte A_i ist dann automatisch H-äquivariant, denn

$$\begin{aligned} A_i h v &= p_i(x_0 \otimes hv) && (16)\\ &= p_i(hx_0 \otimes hv) && (17)\\ &= hp_i(x_0 \otimes v) && (18)\\ &= hA_i v. && (19) \end{aligned}$$

Konjugation unter G macht aus A_i:

$$\begin{aligned} gA_i g^{-1} v &= gp_i(x_0 \otimes g^{-1} v) && (20)\\ &= p_i(gx_0 \otimes v). && (21) \end{aligned}$$

Das im Beweis von Satz 1.1 konstruierte elliptische Symbol ist also gegeben durch

$$\sigma_X v = p_i(X \otimes v). \tag{22}$$

Zu diesem Symbol erhalten wir einen elliptischen Differentialoperator D durch

$$Dv = p_i(\nabla v). \tag{23}$$

Dabei wird ∇ von einem Zusammenhang auf $\mathcal{P}$ induziert.

Es sei noch erwähnt, daß wir damit auch den Fall reeller und quaternionaler G-Moduln miterledigt haben, denn $RO(G)$ und $RSP(G)$ sind auf kanonische Weise in $R(G)$ eingebettet. Daher sind $RO(G,H), RSP(G,H) \subset R(G,H)$. Für einen G-Modul V über $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, ist $\mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} V$ wieder ein G-Modul über $\mathbb{K}$.

Zusammenfassend können wir sagen

Satz 1.9. *Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $(\mathcal{P}, G, \mathbb{R}^n)$ eine transitive G-Struktur auf M, $x_0 \in S^{n-1}$ und H die zu x_0 gehörige Isotropieuntergruppe von G. G sei kompakt und zusammenhängend.*

Dann kann man jedes Element aus $R(G,H), RO(G,H)$ oder $RSP(G,H)$ so als $V_1 - V_2$ schreiben, daß es einen elliptischen Differentialoperator erster Ordnung $C^\infty(M, E_1) \to C^\infty(M, E_2)$ gibt. Dabei bezeichnen wir mit E_i das zu $\mathcal{P}$ und V_i assoziierte Vektorbündel. □

Beweis von Lemma 1.8. G operiert orthogonal auf dem $\mathbb{R}^n$; sei $G' \subset SO(n)$ das Bild von G unter dieser Darstellung. Nun operiert G' transitiv und effektiv auf der S^{n-1}. Diese G' sind klassifiziert, vgl. [5, S. 179], [7], [8], [19]. Wir erhalten folgende Tabelle

G'	$SO(n)$	$U(m)$	$SU(m)$	$Sp(q)Sp(1)$	$Sp(q)U(1)$
H'	$SO(n-1)$	$U(m-1)$	$SU(m-1)$	$Sp(q-1)Sp(1)$	$Sp(q-1)U(1)$
n	n	$2m$	$2m$	$4q$	$4q$

G'	$Sp(q)$	G_2	$Spin(7)$	$Spin(9)$
H'	$Sp(q-1)$	$SU(3)$	G_2	$Spin(7)$
n	$4q$	7	8	16

Wir zeigen die Aussage des Lemmas zunächst für die universelle Überlagerung $\tilde{G}'$ von G'. Dann ist das Lemma auch für jede andere Überlagerung $\hat{G}'$ von G' bewiesen, insbesondere für $\hat{G}' = G'$, denn $R(\hat{G}', \hat{H}') \subset R(\tilde{G}', \tilde{H}')$.

Als Kern eines Ringhomomorphismus ist $R(\tilde{G}', \tilde{H}')$ ein Ideal in $R(\tilde{G}')$; wir müssen die Aussage nur für die Erzeuger von $R(\tilde{G}', \tilde{H}')$ nachweisen.

<u>1. Fall</u>: $\tilde{G}' \subset Spin(n)$, d.h. $G' = SO(n), SU(m), Sp(q), G_2, Spin(7), Spin(9)$ oder $Sp(q)Sp(1)$ für q ungerade.

Wie wir im zweiten Kapitel sehen werden, wird in diesen Fällen das Ideal $R(\tilde{G}', \tilde{H}')$ erzeugt durch $(\Sigma^+ - \Sigma^-)|\tilde{G}'$, d.h. durch die Differenz der beiden Halbspindarstellungen, eingeschränkt auf $\tilde{G}'$. Die Operation auf $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch die Einschränkung der ersten Fundamentaldarstellung Λ^1 von $Spin(n)$. Die Projektionen $\Lambda^1 \otimes \Sigma^+ \to \Sigma^-$ und $\Lambda^1 \otimes \Sigma^- \to \Sigma^+$ sind gegeben durch Clifford-Multiplikation. Auf diese Weise erhalten wir das Symbol des Dirac-Operators.

<u>2. Fall</u>: $G' = Sp(q)Sp(1)$ für q gerade.
Wie im ersten Fall wird $R(G', H')$ von $(\Sigma^+ - \Sigma^-)|G'$ erzeugt, also ist die Aussage für G' richtig. Für die universelle Überlagerung $\tilde{G}' = Sp(q) \times Sp(1)$ gilt aber, daß $R(\tilde{G}', \tilde{H}') \supset R(G', H')$ dieselben Erzeuger haben.

<u>3. Fall</u>: $G' = U(m)$, d.h. $\tilde{G}' = SU(m) \times \mathbb{R}$.
Der Erzeuger von $R(U(m), U(m-1))$, nämlich $1 - \Lambda^{1,0}_{U(m)} \pm \cdots + (-1)^m \Lambda^{m,0}_{U(m)}$, siehe das nächste Kapitel, erzeugt auch $R(\tilde{G}', \tilde{H}')$. Die Komplexifizierung der Darstellung auf $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch $\Lambda^{1,0}_{U(m)} \oplus \Lambda^{0,1}_{U(m)}$. Für den so gewählten Erzeuger ist die Aussage richtig, und wir erhalten das Symbol des Cauchy-Riemann-Operators.

<u>4. Fall</u>: $G' = Sp(q)U(1)$, d.h. $\tilde{G}' = Sp(q) \times \mathbb{R}$.
Der Erzeuger von $R(Sp(q) \times \mathbb{R}, Sp(q-1) \times \mathbb{R})$ ist die Einschränkung des Erzeugers von $R(SU(m) \times \mathbb{R}, SU(m-1) \times \mathbb{R})$.

Sei nun G kompakt und zusammenhängend beliebig. Die kompakte Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G läßt sich in einen halbeinfachen und einen abelschen Teil zerlegen. Daher können wir den Kern der Darstellung auf dem $\mathbb{R}^n$ abspalten, d.h. $\mathfrak{g}$ schreibt sich als $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}_2$, wobei $\mathfrak{g}'$ die Lie-Algebra von G' ist. Somit ist $\tilde{G} = \tilde{G}' \times G_2$ und $\tilde{H} = \tilde{H}' \times G_2$. Dann aber haben $R(\tilde{G}, \tilde{H})$ und $R(\tilde{G}', \tilde{H}')$ dieselben Erzeuger. $\square$

2. Beispiele

Sei wieder M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei $(\mathcal{P}, G, \mathbb{R}^n)$ eine transitive G-Struktur von M. Ferner sei wie gehabt H die Isotropieuntergruppe von G zu $x_0 \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Satz 1.1 besagt, daß wir für jedes Element $V_1 - V_2 \in R(G, H)$ einen elliptischen Operator zwischen den zu V_1 und V_2 gehörigen Bündeln erhalten. Wir werden in diesem Kapitel für die relevanten Gruppen G die Ideale $R(G, H)$ bestimmen, genauer werden wir Erzeuger angeben, deren elliptische Operatoren somit *fundamental* sind für Mannigfaltigkeiten mit G-Struktur.

Zuvor sei jedoch bemerkt, daß wenn G und H denselben Rang haben, jede Darstellung von G schon durch ihre Einschränkung auf H bestimmt ist. Daher ist in diesem Fall $R(G, H) = 0$. Beispiele hierfür sind etwa

G	$Spin(2m+1)$	$SO(2m+1)$	G_2	$Spin^c(2m+1)$
H	$Spin(2m)$	$SO(2m)$	$SU(3)$	$Spin^c(2m)$

Das heißt nun nicht, daß solche Mannigfaltigkeiten keine elliptischen Operatoren haben. So hat man z.B. im Fall $G = Spin(2m+1)$ den Dirac-Operator $D : C^\infty(M, \Sigma M) \to C^\infty(M, \Sigma M)$, und in der Tat ist ja $\Sigma - \Sigma = 0 \in R(Spin(2m+1), Spin(2m))$. Aber wir sehen schon, daß ungerade dimensionale Mannigfaltigkeiten von einem indextheoretischen Standpunkt aus uninteressant sind.

Wir nennen $\alpha \in R(G, H)$ *selbstkonjugiert*, falls $\bar{\alpha} = \alpha$, und *antiselbstkonjugiert*, falls $\bar{\alpha} = -\alpha$. Dabei bezeichnet $\bar{\alpha}$ das zu α konjugierte Element. Für die verwendete Darstellungstheorie siehe etwa [10] und [23].

2.1. *Orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten gerader Dimension.*
Hier haben wir einfach die Strukturgruppe $G = SO(2m)$ mit der Standarddarstellung auf dem $\mathbb{R}^{2m}$, $n = 2m$. Dann ist $H = SO(2m-1)$. Die Darstellungsringe sind $R(SO(2m)) = \mathbb{Z}[\Lambda^1, \ldots, \Lambda^{m-1}, \Lambda^m_+, \Lambda^m_-]$ mit der Relation $(\Lambda^m_+ + \Lambda^{m-2} + \Lambda^{m-4} + \cdots)(\Lambda^m_- + \Lambda^{m-2} + \Lambda^{m-4} + \cdots) = (\Lambda^{m-1} + \Lambda^{m-3} + \cdots)^2$ und $R(SO(2m-1)) = \mathbb{Z}[\Lambda^1, \ldots, \Lambda^{m-1}]$. Dabei bezeichnet Λ^1 die Standarddarstellung auf dem $\mathbb{R}^{2m}$ bzw. $\mathbb{R}^{2m-1}$, und Λ^k die k-te äußere Potenz davon. Λ^m_- bzw. Λ^m_+ sind die (anti-) selbstdualen m-Formen.

Die Einschränkungsabbildung $R(SO(2m)) \to R(SO(2m-1))$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\Lambda^1 &\to 1 + \Lambda^1, \\
\Lambda^2 &\to \Lambda^1 + \Lambda^2, \\
&\vdots \\
\Lambda^{m-1} &\to \Lambda^{m-2} + \Lambda^{m-1}, \\
\Lambda^m_+ &\to \Lambda^{m-1}, \\
\Lambda^m_- &\to \Lambda^{m-1}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, daß das Ideal $R(G, H)$ von zwei Elementen aufgespannt wird:

$$\begin{aligned}
R(G, H) &= (\Lambda^m_+ - \Lambda^{m-1} + \Lambda^{m-2} \mp \cdots, \Lambda^m_- - \Lambda^{m-1} + \Lambda^{m-2} \mp \cdots) && (24) \\
&= (\Lambda^m_+ - \Lambda^m_-, 1 - \Lambda^1 + \Lambda^2 - \Lambda^3 \pm \cdots). && (25)
\end{aligned}$$

Der Erzeuger $1 - \Lambda^1 \pm \cdots + \Lambda^n$ ist stets reell und entspricht dem *Euler*-Operator $d + \delta$. Das Element $\Lambda^m_+ - \Lambda^m_-$ ist reell, falls m gerade ist, d.h. falls n durch 4 teilbar ist, und antiselbstkonjugiert, falls m ungerade ist, d.h. falls $n \equiv 2(4)$. Es entspricht dem *Signatur*-Operator.

2.2 *Spin-Mannigfaltigkeiten gerader Dimension.*
Hier ist $G = Spin(2m)$ und $H = Spin(2m-1)$, $n = 2m$. Die Darstellungsringe sind $R(Spin(2m)) = \mathbb{Z}[\Lambda^1, \ldots, \Lambda^{m-2}, \Sigma^+, \Sigma^-]$ und $R(Spin(2m-1)) = \mathbb{Z}[\Lambda^1, \ldots, \Lambda^{m-2}, \Sigma]$, wobei die Λ^k die Anhebungen der entsprechenden Darstellungen von $SO(2m)$ bzw. $SO(2m-1)$ sind, und $\Sigma^\pm$ sowie Σ die (Halb-)Spindarstellungen.

Die Einschränkungsabbildung $R(Spin(2m)) \to R(Spin(2m-1))$ ist

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^1 & \to & 1 + \Lambda^1, \\ \Lambda^2 & \to & \Lambda^1 + \Lambda^2, \\ & \vdots & \\ \Lambda^{m-2} & \to & \Lambda^{m-3} + \Lambda^{m-2}, \\ \Sigma^+ & \to & \Sigma, \\ \Sigma^- & \to & \Sigma. \end{array}$$

Daraus folgt

$$R(Spin(2m), Spin(2m-1)) = (\Sigma^+ - \Sigma^-). \tag{26}$$

Dieser Erzeuger liefert den *Dirac*-Operator. $\Sigma^+ - \Sigma^-$ ist antiselbstkonjugiert, falls m ungerade ist, reell, falls m durch 4 teilbar ist, und quaternionisch, falls $m \equiv 2(4)$.

2.3. *Spin*(7)*-Mannigfaltigkeiten.*
Wir betrachten nun das etwas exotische Beispiel von 8-Mannigfaltigkeiten mit Ausnahmestrukturgruppe $Spin(7) \subset SO(8)$. Wir wissen bereits $R(Spin(7)) = \mathbb{Z}[\Lambda^1, \Lambda^2, \Sigma]$. Diesmal ist Σ und *nicht* Λ^1 der Modul, der die G-Struktur definiert. Die Isotropiegruppe H eines Punktes ist daher *nicht* $Spin(6)$, sondern die Ausnahmegruppe G_2. Es gilt $R(G_2) = \mathbb{Z}[F^1, F^2]$, wobei F^1 die 7-dimensionale reelle Darstellung von G_2 als Automorphismen der imaginären Oktaven ist, und F^2 die 14-dimensionale reelle adjungierte Darstellung von G_2. Dimensionsüberlegungen liefern für die Einschränkungsabbildung:

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^1 & \to & F^1, \\ \Lambda^2 & \to & F^1 + F^2, \\ \Sigma & \to & F^1 + 1. \end{array}$$

Daher gilt

$$R(Spin(7), G_2) = (\Sigma - 1 - \Lambda^1). \tag{27}$$

Welcher Operator entspricht nun diesem Erzeuger?

Um dies herauszufinden, bemerken wir zunächst, daß die Einbettung $Spin(7) \subset SO(8)$ zu einer Einbettung $Spin(7) \subset Spin(8)$ liftet, da $Spin(7)$ einfach zusammenhängend ist. Diese Einbettung $Spin(7) \subset Spin(8)$ kann man auch so erhalten, daß man die Standardeinbettung von $Spin(7)$ in $Spin(8)$ betrachtet und darauf den *Trialitätsautomorphismus* anwendet. Unter diesem Automorphismus werden die Darstellungen Λ^1, Σ^+ und Σ^- von $Spin(8)$ zyklisch vertauscht. Das Element $\Sigma^+ - \Sigma^-$ geht also auf $\Sigma^- - \Lambda^1$ und nach Einschränkung auf $Spin(7)$ auf $\Sigma - 1 - \Lambda^1$. Wir haben also lediglich den Dirac-Operator wiederentdeckt.

2.4. *$Spin(9)$-Mannigfaltigkeiten.*
Dieses Mal betrachten wir 16-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit Ausnahmestrukturgruppe $Spin(9) \subset SO(16)$. Es gilt $R(Spin(9)) = \mathbb{Z}[\Lambda^1, \Lambda^2, \Lambda^3, \Sigma]$ und die Einbettung $Spin(9) \subset SO(16)$ ist gegeben durch die treue reelle Darstellung Σ. Die Isotropiegruppe H ist $Spin(7)$, und die Einbettung in $Spin(9)$ ist $H = Spin(7) \subset Spin(8) \subset Spin(9) = G$, wobei die Einbettung $Spin(7) \subset Spin(8)$ so ist wie in 2.3, während die Einbettung $Spin(8) \subset Spin(9)$ einfach die Standardeinbettung ist. Die Einschränkungsabbildung $R(G) \to R(H)$ ist somit die Verkettung von Einschränkung auf $Spin(8)$, Trialitätsautomorphismus und Einschränkung auf $Spin(7)$. Wir erhalten

$$\begin{array}{cccccccc}
\Lambda^1 & \to & \Lambda^1 + 1 & \to & \Sigma^+ + 1 & \to & \Sigma + 1, \\
\Lambda^2 & \to & \Lambda^2 + \Lambda^1 & \to & \Lambda^2 + \Sigma^+ & \to & \Lambda^1 + \Lambda^2 + \Sigma, \\
\Lambda^3 & \to & \begin{array}{c}\Lambda^3 + \Lambda^2 = \\ \Sigma^+ \cdot \Sigma^- - \Lambda^1 + \Lambda^2\end{array} & \to & \Sigma^- \cdot \Lambda^1 - \Sigma^+ + \Lambda^2 & \to & \Sigma \cdot \Lambda^1 + \Lambda^1 + \Lambda^2, \\
\Sigma & \to & \Sigma^+ + \Sigma^- & \to & \Sigma^- + \Lambda^1 & \to & \Sigma + \Lambda^1 + 1.
\end{array}$$

Für den Kern erhalten wir

$$R(Spin(9), Spin(7)) = (\Lambda^1(\Sigma - \Lambda^1) + \Lambda^2 - \Lambda^3 - \Sigma + 1). \tag{28}$$

Ähnlich wie in 2.3 kann man feststellen, daß dieser Erzeuger die Einschränkung von $\Sigma^+ - \Sigma^- \in R(Spin(16))$ ist. Wir haben also wieder nur den Dirac-Operator gefunden.

2.5. *$Spin^c$-Mannigfaltigkeiten gerader Dimension.*
Wir betrachten nun Mannigfaltigkeiten mit Strukturgruppe $Spin^c(n) = \frac{Spin(n) \times U(1)}{\{(1,1),(-1,-1)\}}$. Beispiele sind etwa Spin-Mannigfaltigkeiten und fast-komplexe Mannigfaltigkeiten. Wir studieren zunächst die Gruppe $G' = Spin(n) \times U(1)$, $n = 2m$. Die Darstellung, die das Tangentialbündel induziert, ist die erste Fundamentaldarstellung auf dem $Spin(n)$-Faktor und trivial auf dem $U(1)$-Faktor. Daher ist die Isotropieuntergruppe $H = Spin^c(n-1)$ bzw. $H' = Spin(n-1) \times U(1)$. Für die Darstellungsringe gilt $R(G') = \mathbb{Z}[\Lambda^1, \dots, \Lambda^{m-2}, \Sigma^+, \Sigma^-, z, \bar{z}]$ und $R(H') = \mathbb{Z}[\Lambda^1, \dots, \Lambda^{m-2}, \Sigma, z, \bar{z}]$, jeweils mit der Relation $z\bar{z} = 1$. Dabei bezeichnet z die Standarddarstellung von $U(1)$. Die Einschränkungsabbildung $R(G') \to R(H')$ ist gegeben durch

$$\begin{array}{ccl}
\Lambda^1 & \to & 1 + \Lambda^1, \\
\Lambda^2 & \to & \Lambda^1 + \Lambda^2, \\
& \vdots &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda^{m-2} &\to \Lambda^{m-3}+\Lambda^{m-2},\\
\Sigma^+ &\to \Sigma,\\
\Sigma^- &\to \Sigma,\\
z &\to z,\\
\bar z &\to \bar z.
\end{aligned}$$

Es ergibt sich $R(G',H') = (\Sigma^+ - \Sigma^-)$. Doch nun zurück zu $Spin^c$. $(-1,-1)$ operiert auf Λ^k trivial und auf $\Sigma^\pm$ sowie z und $\bar z$ durch Multiplikation mit -1. Daher ist $R(Spin^c(n))$ der Unterring von $R(Spin(n)\times U(1))$, der aus den Polynomen besteht, die gerade in $\Sigma^{(\pm)}, z$ und $\bar z$ sind. Insbesondere ist $\Sigma^+ - \Sigma^-$ *nicht* in $R(G)$. Das zu z^2 gehörige $U(1)$-Bündel heißt *kanonisches Geradenbündel.* Für $R(G,H)$ erhalten wir zunächst vier Erzeuger, nämlich

$$R(G,H) \;=\; ((\Sigma^+ - \Sigma^-)z, (\Sigma^+ - \Sigma^-)\bar z, (\Sigma^+ - \Sigma^-)\Sigma^+, (\Sigma^+ - \Sigma^-)\Sigma^-). \quad (29)$$

Nun gilt aber $(\Sigma^+ - \Sigma^-)\bar z = (\Sigma^+ - \Sigma^-)z\bar z^2$,$(\Sigma^+ - \Sigma^-)\Sigma^+ = (\Sigma^+ - \Sigma^-)z\bar z\Sigma^+$ und $(\Sigma^+ - \Sigma^-)\Sigma^- = (\Sigma^+ - \Sigma^-)z\bar z\Sigma^-$. Daraus folgt

$$R(G,H) = ((\Sigma^+ - \Sigma^-)z). \quad (30)$$

Wir erhalten also einen getwisteten Dirac-Operator als fundamentalen Operator.

2.6. *$Spin^h$-Mannigfaltigkeiten gerader Dimension.*
Ersetzt man in der Gruppe $Spin^c(n)$ den $U(1)$-Faktor durch $Sp(1)$, so erhält man die Gruppe $Spin^h(n)$, d.h. $Spin^h(n) = \frac{Spin(n)\times Sp(1)}{\{(1,1),(-1,-1)\}}$. Beispiele für $Spin^h$-Mannigfaltigkeiten sind $Spin^c$-Mannigfaltigkeiten und fast-quaternionische Mannigfaltigkeiten. Zur Bestimmung der fundamentalen Operatoren betrachtet man zunächst ähnlich wie in 2.5 die Gruppen $G' = Spin(2m)\times Sp(1)$ und $H' = Spin(2m-1)\times Sp(1)$. Die Darstellungsringe sind $R(G') = \mathbb{Z}[\Lambda^1,\dots,\Lambda^{m-2},\Sigma^+,\Sigma^-,\rho]$ und $R(H') = \mathbb{Z}[\Lambda^1,\dots,\Lambda^{m-2},\Sigma,\rho]$, wobei ρ die Fundamentaldarstellung von $Sp(1)$ bezeichnet. Wie in 2.5 ergibt sich $R(G',H') = (\Sigma^+ - \Sigma^-)$. $R(G)$, $G = Spin^h(2m)$, besteht aus den Elementen von $R(G')$, die gerade in $\Sigma^\pm$ und ρ sind. Also folgt

$$\begin{aligned}
R(G,H) &= ((\Sigma^+ - \Sigma^-)\rho, (\Sigma^+ - \Sigma^-)\Sigma^+, (\Sigma^+ - \Sigma^-)\Sigma^-) && (31)\\
&= ((\Sigma^+ - \Sigma^-)\rho, (\Sigma^+ - \Sigma^-)(\Sigma^+ + \Sigma^-), (\Sigma^+ - \Sigma^-)(\Sigma^- - \Sigma^-)) && (32)\\
&= ((\Sigma^+ - \Sigma^-)\rho, \Lambda^m_+ - \Lambda^m_-, 1 - \Lambda^1 \pm \dots + \Lambda^n). && (33)
\end{aligned}$$

Die Erzeuger liefern somit den Euler-Operator, den Signatur-Operator und einen weiteren getwisteten Dirac-Operator.

2.7. *Fast-komplexe Mannigfaltigkeiten.*
Fast-komplexe Mannigfaltigkeiten sind solche, deren Tagentialbündel eine komplexe Struktur trägt. Die Strukturgruppe ist somit auf $G = U(m)$ reduziert. Der Darstellungsring ist $R(U(m)) = \mathbb{Z}[\Lambda^{1,0}_{U(m)},\dots,\Lambda^{m-1,0}_{U(m)},\Lambda^{m,0}_{U(m)},\Lambda^{0,m}_{U(m)}]$ mit der Relation $\Lambda^{m,0}_{U(m)}\cdot\Lambda^{0,m}_{U(m)} = 1$. Die Elemente aus $\Lambda^{p,q}_{U(m)}$ werden üblicherweise als (p,q)-Formen bezeichnet. Das Tangentialbündel wird durch den Modul

$\Lambda^{1,0}_{U(m)}$ induziert. Somit ist die Isotropieunteruppe $H = U(m-1)$ und $R(H) = \mathbb{Z}[\Lambda^{1,0}_{U(m-1)}, \ldots, \Lambda^{m-2,0}_{U(m-1)}, \Lambda^{m-1,0}_{U(m-1)}, \Lambda^{0,m-1}_{U(m-1)}]$. Die Einschränkungsabbildung ist gegeben durch

$$\begin{array}{rcl}
\Lambda^{1,0}_{U(m)} & \to & 1 + \Lambda^{1,0}_{U(m-1)}, \\
\Lambda^{2,0}_{U(m)} & \to & \Lambda^{1,0}_{U(m-1)} + \Lambda^{2,0}_{U(m-1)}, \\
 & \vdots & \\
\Lambda^{m-1,0}_{U(m)} & \to & \Lambda^{m-2,0}_{U(m-1)} + \Lambda^{m-1,0}_{U(m-1)}, \\
\Lambda^{m,0}_{U(m)} & \to & \Lambda^{m-1,0}_{U(m-1)}, \\
\Lambda^{0,m}_{U(m)} & \to & \Lambda^{0,m-1}_{U(m-1)}.
\end{array}$$

Daraus folgt

$$R(U(m), U(m-1)) = (1 - \Lambda^{1,0}_{U(m)} + \Lambda^{2,0}_{U(m)} \mp \cdots + (-1)^m \Lambda^{m,0}_{U(m)}). \qquad (34)$$

Als fundamentalen Operator können wir somit den *Cauchy-Riemann*-Operator nehmen.

2.8. *Fast-komplexe Mannigfaltigkeiten mit $c_1 = 0$.*
Die fast-komplexen Mannigfaltigkeiten mit verschwindender erster Chern-Klasse sind gerade diejenigen, deren Strukturgruppe auf $G = SU(m)$ reduziert werden kann. Dann ist $H = SU(m-1)$, $R(G) = \mathbb{Z}[\Lambda^{1,0}_{SU(m)}, \ldots, \Lambda^{m-1,0}_{SU(m)}]$ und $R(H) = \mathbb{Z}[\Lambda^{1,0}_{SU(m-1)}, \ldots, \Lambda^{m-2,0}_{SU(m-1)}]$. Die Einschränkungsabbildung ist gegeben durch

$$\begin{array}{rcl}
\Lambda^{1,0}_{SU(m)} & \to & 1 + \Lambda^{1,0}_{SU(m-1)}, \\
\Lambda^{2,0}_{SU(m)} & \to & \Lambda^{1,0}_{SU(m-1)} + \Lambda^{2,0}_{SU(m-1)}, \\
 & \vdots & \\
\Lambda^{m-1,0}_{SU(m)} & \to & \Lambda^{m-2,0}_{SU(m-1)} + \Lambda^{m-1,0}_{SU(m-1)}.
\end{array}$$

Für den Erzeuger von $R(SU(m), SU(m-1))$ erhalten wir

$$1 - \Lambda^{1,0}_{SU(m)} + \Lambda^{2,0}_{SU(m)} \pm \cdots + (-1)^{m-1} \Lambda^{m-1,0}_{SU(m)} + (-1)^m. \qquad (35)$$

Unter der Einschränkung $R(U(m)) \to R(SU(m))$ wird $\Lambda^{k,0}_{U(m)}$ auf $\Lambda^{k,0}_{SU(m)}$ abgebildet, $k = 1, \ldots, m-1$, und $\Lambda^{m,0}_{U(m)}$ auf 1. Daher ist der Erzeuger von $R(SU(m), SU(m-1))$ die Einschränkung des Erzeugers von $R(U(m), U(m-1))$. Andererseits ist aber $SU(m) \subset Spin(2m)$ und man kann leicht sehen, daß der Erzeuger $\Sigma^+ - \Sigma^-$ von $R(Spin(2m), Spin(2m-1))$ auch auf den von $R(SU(m), SU(m-1))$ abgebildet wird. Der fundamentale Operator ist also gleichzeitig der Cauchy-Riemann-Operator als auch der Dirac-Operator.

2.9. *Fast-quaternionische Mannigfaltigkeiten.*
Fast-quaternionische Mannigfaltigkeiten haben die Strukturgruppe $G = \frac{Sp(q)\times Sp(1)}{\{(1,1),(-1,-1)\}}$, $n = 4q$. Wir betrachten zunächst $G' = Sp(q) \times Sp(1)$. Die Isotropieuntergruppe ist dann $H' = Sp(q-1)\times Sp(1)$, wobei die Einbettung $H' \subset G'$ gegeben ist durch $(A,h) \to \left(\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & h \end{array}\right), h\right)$. Für die Darstellungsringe gilt

$$\begin{aligned} R(Sp(q)) &= \mathbb{Z}[\Lambda^{1,0}, \ldots, \Lambda^{q,0}], && (36)\\ R(Sp(1)) &= \mathbb{Z}[\rho], && (37) \end{aligned}$$

wobei $\Lambda^{k,0}$ die Einschränkung von $\Lambda^{k,0}_{SU(2q)}$ auf $Sp(q) \subset SU(2q)$ ist. Die $Sp(q)$-Moduln $\Lambda^{k,0}$ sind nicht irreduzibel, aber das spielt für unsere weitere Überlegung keine Rolle. Es folgt

$$\begin{aligned} R(G') &= \mathbb{Z}[\Lambda^{1,0}, \ldots, \Lambda^{q,0}, \rho], && (38)\\ R(H') &= \mathbb{Z}[\Lambda^{1,0}, \ldots, \Lambda^{q-1,0}, \rho], && (39) \end{aligned}$$

wobei die Einschränkungsabbildung gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \Lambda^{1,0} &\to \Lambda^{1,0} + \rho,\\ \Lambda^{2,0} &\to \Lambda^{2,0} + \Lambda^{1,0}\cdot\rho + 1,\\ \Lambda^{3,0} &\to \Lambda^{3,0} + \Lambda^{2,0}\cdot\rho + \Lambda^{1,0},\\ &\vdots\\ \Lambda^{q-1,0} &\to \Lambda^{q-1,0} + \Lambda^{q-2,0}\cdot\rho + \Lambda^{q-3,0},\\ \Lambda^{q,0} &\to \Lambda^{q-1,0}\cdot\rho + 2\cdot\Lambda^{q-2,0},\\ \rho &\to \rho. \end{aligned}$$

Wir definieren die Polynome $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = -t$, $p_2(t) = t^2 - 2$ und für $k \geq 2$ induktiv $p_k(t) = -p_{k-1}(t)t - p_{k-2}(t)$. Dann erhält man

$$R(G', H') = (\sum_{k=0}^{q} p_k(\rho)\Lambda^{q-k,0}). \tag{40}$$

Wir setzen abkürzend $\mathcal{Q} = \sum_{k=0}^{q} p_k(\rho)\Lambda^{q-k,0}$. Nun zurück zu den Gruppen $G = \frac{Sp(q)\times Sp(1)}{\{(1,1),(-1,-1)\}}$ und $H = \frac{Sp(q-1)\times Sp(1)}{\{(1,1),(-1,-1)\}}$. Wir müssen wieder die virtuellen Darstellungen aus $R(G')$ und $R(H')$ herausfiltern, unter denen $\mathbb{Z}_2 = \{(1,1),(-1,-1)\}$ trivial operiert. Auf $\Lambda^{k,0}$ operiert -1 durch $(-1)^k$, auf ρ operiert -1 durch -1. Geben wir $\Lambda^{k,0}$ den Grad k und ρ den Grad 1, dann besteht $R(G)$ genau aus den Polynomen in $R(G')$ von geradem Grad.

Ist q gerade, dann ist $\mathcal{Q}$ gerade und erzeugt daher $R(G,H)$. Ist dagegen q ungerade, dann ist auch $\mathcal{Q}$ ungerade und wir erhalten

$$R(G,H) = (\mathcal{Q}\cdot\Lambda^{1,0}, \mathcal{Q}\cdot\Lambda^{3,0}, \ldots, \mathcal{Q}\cdot\Lambda^{q,0}, \mathcal{Q}\cdot\rho). \tag{41}$$

Die Fallunterscheidung nach q gerade und ungerade erinnert uns an folgenden Sachverhalt: Ist q gerade, so liftet die Einbettung $G = Sp(q)Sp(1) \subset SO(4q)$ zu einer Einbettung $G \subset Spin(4q)$. In diesem Fall sind also fast-quaternionische Mannigfaltigkeiten automatisch spin. In der Tat zeigt ein Vergleich der Gewichte, daß $\mathcal{Q}$ die Einschränkung von $\Sigma^+ - \Sigma^-$ auf G ist. Für gerades q haben wir also wieder einmal den Dirac-Operator entdeckt.

Im Fall von ungeradem q dagegen liftet die Einbettung nicht, sondern wir haben $Sp(q) \times Sp(1) \subset Spin(4q)$. Auch hier ist $\mathcal{Q}$ die Einschränkung von $\Sigma^+ - \Sigma^-$. Der Dirac-Operator selbst existiert jetzt nicht, wohl aber die mit den $\Lambda^{k,0}$, k ungerade, und ρ getwisteten Dirac-Operatoren.

Erwähnenswert ist hier noch der Fall $q = 1$. Es gilt nämlich $Sp(1)Sp(1) = SO(4)$, d.h. jede orientierte 4-Mannigfaltigkeit ist in unserem Sinne fast-quaternionisch. Es ist dann $\Lambda^{1,0} = \Sigma^+$ und $\rho = \Sigma^-$. Daher gilt

$$
\begin{aligned}
R(G,H) &= ((\Sigma^+ - \Sigma^-)\Sigma^+, (\Sigma^+ - \Sigma^-)\Sigma^-) && (42)\\
&= ((\Sigma^+ - \Sigma^-)(\Sigma^+ + \Sigma^-), (\Sigma^+ - \Sigma^-)^2) && (43)\\
&= (\Lambda^2_+ - \Lambda^2_-, 1 - \Lambda^1 + \Lambda^2 - \Lambda^3 + \Lambda^4), && (44)
\end{aligned}
$$

was mit dem Ergebnis aus 2.1 übereinstimmt.

2.10. *$Sp(q)U(1)$-Mannigfaltigkeiten.*
Wir betrachten jetzt die Strukturgruppe $G = \frac{Sp(q)\times U(1)}{\{(1,1),(-1,-1)\}}$, $n = 4q$. Dann ist die Isotropieuntergruppe $H = \frac{Sp(q-1)\times U(1)}{\{(1,1),(-1,-1)\}}$. Die Darstellung ρ von $Sp(1)$ zerfällt unter Einschränkung auf $U(1)$ in $z + \bar{z}$. Daraus folgert man leicht unter Verwendung von 2.9, daß

$$R(G,H) = (\mathcal{Q}), \text{ falls } q \text{ gerade}, \qquad (45)$$

$$R(G,H) = (\mathcal{Q}\cdot\Lambda^{1,0}, \mathcal{Q}\cdot\Lambda^{3,0}, \ldots, \mathcal{Q}\cdot\Lambda^{q,0}, \mathcal{Q}\cdot z, \mathcal{Q}\cdot\bar{z}), \text{ falls } q \text{ ungerade}. \qquad (46)$$

Dabei ist wieder $\mathcal{Q} = \sum_{k=0}^{q} p_k(z+\bar{z})\Lambda^{q-k,0}$ die Einschränkung von $\Sigma^+ - \Sigma^-$. Im letzteren Fall, wenn q ungerade ist, kann man den Erzeuger $\mathcal{Q}\cdot z$ mit $\bar{z}\cdot\Lambda^{1,0}, \bar{z}\cdot\Lambda^{3,0}, \ldots, \bar{z}\cdot\Lambda^{q,0}$ und $\bar{z}^2$ multiplizieren und erhält so die anderen Erzeuger. Also gilt

$$R(G,H) = (\mathcal{Q}\cdot z), \text{ falls } q \text{ ungerade}. \qquad (47)$$

2.11. *$Sp(q)$-Mannigfaltigkeiten.* Der Fall, daß sich die Strukturgruppe auf $G = Sp(q)$, $n = 4q$, reduzieren läßt, wie z.B. bei hyper-Kähler-Mannigfaltigkeiten, ist wieder recht einfach zu behandeln. Es gilt $R(G) = \mathbb{Z}[\Lambda^{1,0}, \ldots, \Lambda^{q,0}]$ und $R(H) = \mathbb{Z}[\Lambda^{1,0}, \ldots, \Lambda^{q-1,0}]$ und die Einschränkungsabbildung ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\Lambda^{1,0} &\to \Lambda^{1,0} + 2,\\
\Lambda^{2,0} &\to \Lambda^{2,0} + 2\Lambda^{1,0} + 1,\\
\Lambda^{3,0} &\to \Lambda^{3,0} + 2\Lambda^{2,0} + \Lambda^{1,0},\\
&\vdots\\
\Lambda^{q-1,0} &\to \Lambda^{q-1,0} + 2\Lambda^{q-2,0} + \Lambda^{q-3,0},\\
\Lambda^{q,0} &\to 2\Lambda^{q-1,0} + 2\Lambda^{q-2,0}.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$R(G,H) = (2 - 2\Lambda^{1,0} + 2\Lambda^{2,0} \mp \cdots + (-1)^{q-1} 2\Lambda^{q-1,0} + (-1)^q \Lambda^{q,0}). \qquad (48)$$

Da die Darstellung ρ von $Sp(1)$ unter Einschränkung auf die triviale Gruppe auf 2 geht, und da $p_k(2) = (-1)^k 2$ ist für $k \geq 1$ (Induktion), ist der Erzeuger von $R(G,H)$ die Einschränkung von $\mathcal{Q}$ und daher von $\Sigma^+ - \Sigma^-$ unter der Einbettung $Sp(q) \subset Spin(4q)$.

2.12. *Karl Heinz Mayers Beispiele I*, vgl. [17].
Seien $n = 2m$ und k vorgegeben. Wir definieren $G = G(n,k)$ als das Urbild von $SO(n) \times SO(k) \subset SO(n+k)$ unter der zweifachen Überlagerung $Spin(n+k) \to SO(n+k)$. Die wichtigsten Beispiele für Mannigfaltigkeiten mit dieser Strukturgruppe sind orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten, die sich in eine Spin-Mannigfaltigkeit der Dimension $n+k$ immersieren lassen. Die Isotropiegruppe ist $H = G(n-1,k)$. Man kann $G(n,k)$ auch schreiben als $G(n,k) = \frac{Spin(n) \times Spin(k)}{\{(1,1),(-1,-1)\}}$.
Für die darstellungstheoretischen Überlegungen betrachten wir zunächst wieder $G' = Spin(n) \times Spin(k)$ und entsprechend $H' = Spin(n-1) \times Spin(k)$.

1. Fall: $k = 2l$ ist gerade.
Es gilt $R(G') = \mathbb{Z}[\Lambda^1, \ldots, \Lambda^{m-2}, \Sigma^+, \Sigma^-, \tilde{\Lambda}^1, \ldots, \tilde{\Lambda}^{l-2}, \tilde{\Sigma}^+, \tilde{\Sigma}^-]$, wobei die Tilde die Moduln des zweiten Faktors $Spin(k)$ kennzeichnet. Die übliche Rechnung liefert $R(G',H') = (\Sigma^+ - \Sigma^-)$. Auf $G(n,k)$-Moduln muß $(-1,-1)$ trivial operieren. Also besteht $R(G)$ aus den Polynomen in $R(G')$, die gerade sind in $\Sigma^+, \Sigma^-, \tilde{\Sigma}^+, \tilde{\Sigma}^-$.
Daraus folgt

$$\begin{aligned}
R(G,H) &= ((\Sigma^+ - \Sigma^-)\Sigma^+, (\Sigma^+ - \Sigma^-)\Sigma^-, (\Sigma^+ - \Sigma^-)\tilde{\Sigma}^+, (\Sigma^+ - \Sigma^-)\tilde{\Sigma}^-) & (49)\\
&= ((\Sigma^+ - \Sigma^-)^2, (\Sigma^+ - \Sigma^-)(\Sigma^+ + \Sigma^-), (\Sigma^+ - \Sigma^-)(\tilde{\Sigma}^+ - \tilde{\Sigma}^-), \\
&\quad (\Sigma^+ - \Sigma^-)(\tilde{\Sigma}^+ + \tilde{\Sigma}^-)) & (50)\\
&= (\Lambda^m_+ - \Lambda^m_-, 1 - \Lambda^1 + \Lambda^2 \mp \cdots, (\Sigma^+ - \Sigma^-)(\tilde{\Sigma}^+ - \tilde{\Sigma}^-), \\
&\quad (\Sigma^+ - \Sigma^-)(\tilde{\Sigma}^+ + \tilde{\Sigma}^-)). & (51)
\end{aligned}$$

Neben Signatur- und Euler-Operator erhalten wir also noch zwei getwistete Dirac-Operatoren als fundamentale Operatoren.

2. Fall: $k = 2l+1$ ist ungerade.
Nun ist $R(G') = \mathbb{Z}[\Lambda^1, \ldots, \Lambda^{m-2}, \Sigma^+, \Sigma^-, \tilde{\Lambda}^1, \ldots, \tilde{\Lambda}^{l-2}, \tilde{\Sigma}]$. Analog zum ersten Fall erhalten wir

$$R(G,H) = (\Lambda^m_+ - \Lambda^m_-, 1 - \Lambda^1 + \Lambda^2 \mp \cdots, (\Sigma^+ - \Sigma^-)\tilde{\Sigma}). \qquad (52)$$

Hier gibt es somit neben Signatur- und Euler-Operator noch einen weiteren fundamentalen Operator.

2.13. *Karl Heinz Mayers Beispiele II.*
Als Variation von 2.12 betrachten wir die Strukturgruppe $G = G(n,k,2)$, die definiert ist als Urbild von $SO(n) \times SO(k) \subset SO(n+k)$ unter dem surjektiven Homomorphismus $Spin^c(n+k) \to SO(n+k)$. Die wichtigsten Beispiele sind orientierte Riemannsche n-Mannigfaltigkeiten, die in eine $Spin^c$-Mannigfaltigkeit der

Dimension $n + k$ immersiert werden können. Wir betrachten wieder stets den Fall gerader Dimension $n = 2m$. Alternativ kann man $G(n, k, 2)$ definieren durch

$$G(n, k, 2) = \frac{Spin(n) \times Spin(k) \times U(1)}{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}, \tag{53}$$

wobei $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(1, 1, 1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1), (1, -1, -1)\}$. Die Isotropiegruppe ist $H = G(n-1, k, 2)$. Wir setzen $G' = Spin(n) \times Spin(k) \times U(1)$ und entsprechend $H' = Spin(n-1) \times Spin(k) \times U(1)$.

1. Fall: $k = 2l$ ist gerade.
Es gilt $R(G') = \mathbb{Z}[\Lambda^1, \ldots, \Lambda^{m-2}, \Sigma^+, \Sigma^-, \tilde{\Lambda}^1, \ldots, \tilde{\Lambda}^{l-2}, \tilde{\Sigma}^+, \tilde{\Sigma}^-, z, \bar{z}]$ und $R(G', H') = (\Sigma^+ - \Sigma^-)$. Auf G-Moduln muß $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ trivial operieren und es folgt

$$\begin{aligned} R(G, H) \quad = \quad & (\Lambda^m_+ - \Lambda^m_-, 1 - \Lambda^1 + \Lambda^2 \mp \cdots, (\Sigma^+ - \Sigma^-)(\tilde{\Sigma}^+ - \tilde{\Sigma}^-)z, \\ & (\Sigma^+ - \Sigma^-)(\tilde{\Sigma}^+ + \tilde{\Sigma}^-)z). \end{aligned} \tag{54}$$

Dieses Mal bekommen wir neben Signatur- und Euler-Operator noch zwei weitere fundamentale Operatoren.

2. Fall: $k = 2l + 1$ ist ungerade.
Nun gilt $R(G') = \mathbb{Z}[\Lambda^1, \ldots, \Lambda^{m-2}, \Sigma^+, \Sigma^-, \tilde{\Lambda}^1, \ldots, \tilde{\Lambda}^{l-2}, \tilde{\Sigma}, z, \bar{z}]$ und $R(G', H') = (\Sigma^+ - \Sigma^-)$. Wir erhalten

$$R(G, H) = (\Lambda^m_+ - \Lambda^m_-, 1 - \Lambda^1 + \Lambda^2 \mp \cdots, (\Sigma^+ - \Sigma^-)\tilde{\Sigma}z). \tag{55}$$

Also haben wir wieder einen weiteren fundamentalen Operator neben Signatur- und Euler-Operator.

Zum Abschluß dieses Kapitels betrachten wir ein Beispiel einer nicht zusammenhängenden Strukturgruppe, für die Satz 1.1 ja auch gilt, nämlich $G = O(2m)$.

2.14. *Nicht notwendigerweise orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten gerader Dimension.*

Die Strukturgruppe ist jetzt also $G = O(n)$, $n = 2m$, die Isotropieuntergruppe ist $H = O(2m-1)$. Die Darstellungsringe sind $R(O(2m)) = \mathbb{Z}[\Lambda^1, \ldots, \Lambda^{2m}]$ mit den Relationen $(\Lambda^{2m})^2 = 1$ sowie $\Lambda^k \Lambda^{2m} = \Lambda^{2m-k}$ für $k = 1, \ldots, 2m-1$ und $R(O(2m-1)) = \mathbb{Z}[\Lambda^1, \ldots, \Lambda^{2m-1}]$ mit den Relationen $(\Lambda^{2m-1})^2 = 1$ sowie $\Lambda^k \Lambda^{2m-1} = \Lambda^{2m-1-k}$ für $k = 1, \ldots, 2m-2$.

Die Einschränkungsabbildung $R(O(2m)) \to R(O(2m-1))$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \Lambda^1 & \to 1 + \Lambda^1, \\ \Lambda^2 & \to \Lambda^1 + \Lambda^2, \\ & \vdots \\ \Lambda^{m-1} & \to \Lambda^{m-2} + \Lambda^{m-1}, \\ \Lambda^{2m} & \to \Lambda^{2m-1}. \end{aligned}$$

Das Relationenideal von $R(O(2m))$ geht unter der Einschränkungsabbildung surjektiv auf dasjenige von $R(O(2m-1))$. Dann sieht man leicht, daß das Ideal $R(G, H)$

erzeugt wird von $1 - \Lambda^1 \pm \cdots + \Lambda^{2m}$. Der Euler-Operator ist somit der fundamentale Operator.

Wir fassen nun die Hauptergebnisse dieses Kapitels in Tabellenform zusammen. Dabei geben wir für alle untersuchten Gruppen G Erzeuger von $R(G, H)$ an und erinnern an die zugehörigen fundamentalen Operatoren.

G	n	Erz. v. $R(G, H)$	fund. Op.
$SO(2m)$	$2m$	$1 - \Lambda^1 \pm \cdots - \Lambda^{2m-1} + 1$, $\Lambda^m_+ - \Lambda^m_-$	Euler-Op. Signatur-Op.
$O(2m)$	$2m$	$1 - \Lambda^1 \pm \cdots + \Lambda^{2m}$	Euler-Op.
$Spin(2m)$	$2m$	$\Sigma^+ - \Sigma^-$	Dirac-Op.
$Spin(7)$	8	$\Sigma^+ - \Sigma^-$	Dirac-Op.
$Spin(9)$	16	$\Sigma^+ - \Sigma^-$	Dirac-Op.
$Spin^c(2m)$	$2m$	$(\Sigma^+ - \Sigma^-)z$	getw. Dirac-Op.
$Spin^h(2m)$	$2m$	$1 - \Lambda^1 \pm \cdots - \Lambda^{2m-1} + 1$, $\Lambda^m_+ - \Lambda^m_-$, $(\Sigma^+ - \Sigma^-)\rho$	Euler-Op. Signatur-Op. getw. Dirac-Op.
$U(m)$	$2m$	$1 - \Lambda^{1,0}_{U(m)} \pm \cdots + (-1)^m \Lambda^{m,0}_{U(m)}$	Cauchy-Riemann-Op.
$SU(m)$	$2m$	$1 - \Lambda^{1,0}_{SU(m)} \pm \cdots$ $+(-1)^{m-1}\Lambda^{m-1,0}_{SU(m)} + (-1)^m$ $= \Sigma^+ - \Sigma^-$	Cauchy-Riemann-Op. $\cong$ Dirac-Op.
$Sp(q)Sp(1)$, q gerade	$4q$	$\Sigma^+ - \Sigma^-$	Dirac-Op.
$Sp(q)Sp(1)$, q ungerade	$4q$	$(\Sigma^+ - \Sigma^-) \cdot \rho$, $(\Sigma^+ - \Sigma^-) \cdot \Lambda^{1,0}$, $(\Sigma^+ - \Sigma^-) \cdot \Lambda^{3,0}$, $\vdots$ $(\Sigma^+ - \Sigma^-) \cdot \Lambda^{q,0}$	$\frac{q+3}{2}$ getw. Dirac-Op.
$Sp(q)U(1)$, q gerade	$4q$	$\Sigma^+ - \Sigma^-$	Dirac-Op.
$Sp(q)U(1)$, q ungerade	$4q$	$(\Sigma^+ - \Sigma^-) \cdot z$	getw. Dirac-Op.
$Sp(q)$	$4q$	$\Sigma^+ - \Sigma^-$	Dirac-Op.
$G(2m, 2l)$	$2m$	$1 - \Lambda^1 \pm \cdots - \Lambda^{2m-1} + 1$, $\Lambda^m_+ - \Lambda^m_-$, $(\Sigma^+ - \Sigma^-)(\tilde{\Sigma}^+ - \tilde{\Sigma}^-)$, $(\Sigma^+ - \Sigma^-)(\tilde{\Sigma}^+ + \tilde{\Sigma}^-)$	Euler-Op. Signatur-Op. 2 getw. Dirac-Op.
$G(2m, 2l+1)$	$2m$	$1 - \Lambda^1 \pm \cdots - \Lambda^{2m-1} + 1$, $\Lambda^m_+ - \Lambda^m_-$, $(\Sigma^+ - \Sigma^-)\tilde{\Sigma}$	Euler-Op. Signatur-Op. getw. Dirac-Op.

G	n	Erz. v. $R(G,H)$	fund. Op.
$G(2m,2l,2)$	$2m$	$1-\Lambda^1 \pm \cdots - \Lambda^{2m-1}+1$, $\Lambda_+^m - \Lambda_-^m$, $(\Sigma^+ - \Sigma^-)(\tilde{\Sigma}^+ - \tilde{\Sigma}^-)z$, $(\Sigma^+ - \Sigma^-)(\tilde{\Sigma}^+ + \tilde{\Sigma}^-)z$	Euler-Op. Signatur-Op. 2 getw. Dirac-Op.
$G(2m,2l+1,2)$	$2m$	$1-\Lambda^1 \pm \cdots - \Lambda^{2m-1}+1$, $\Lambda_+^m - \Lambda_-^m$, $(\Sigma^+ - \Sigma^-)\tilde{\Sigma}z$	Euler-Op. Signatur-Op. getw. Dirac-Op.

In der folgenden Tabelle sortieren wir die Erzeuger nach reellen, quaternionischen und antiselbstkonjugierten. Man beachte, daß (virtuelle) Darstellungen durchaus gleichzeitig reell und quaternionisch sein können, nämlich solche der Form $V+\bar{V}$.

G	reelle Erz.	quat. Erz.	antis. Erz.
$SO(2m)$	$1-\Lambda^1 \pm \cdots - \Lambda^{2m-1}+1$; $\Lambda_+^m - \Lambda_-^m$, $m \equiv 0(2)$	-	$\Lambda_+^m - \Lambda_-^m$, $m \equiv 1(2)$
$O(2m)$	$1-\Lambda^1 \pm \cdots + \Lambda^{2m}$	-	-
$Spin(2m)$	$\Sigma^+ - \Sigma^-$, $m \equiv 0(4)$	$\Sigma^+ - \Sigma^-$, $m \equiv 2(4)$	$\Sigma^+ - \Sigma^-$, $m \equiv 1(2)$
$Spin(7)$	$\Sigma^+ - \Sigma^-$	-	-
$Spin(9)$	$\Sigma^+ - \Sigma^-$	-	-
$Spin^c(2m)$	$1-\Lambda^1 \pm \cdots - \Lambda^{2m-1}+1$; $\Lambda_+^m - \Lambda_-^m$, $m \equiv 0(2)$; $(\Sigma^+ - \Sigma^-)(z-\bar{z})$, $m \equiv 1(2)$; $(\Sigma^+ - \Sigma^-)(z+\bar{z})$, $m \equiv 0(4)$	$(\Sigma^+ - \Sigma^-)\cdot$ $(z-\bar{z})$, $m \equiv 1(2)$; $(\Sigma^+ - \Sigma^-)\cdot$ $(z+\bar{z})$, $m \equiv 2(4)$	$\Lambda_+^m - \Lambda_-^m$, $m \equiv 1(2)$; $(\Sigma^+ - \Sigma^-)\cdot$ $(z-\bar{z})$, $m \equiv 0(2)$; $(\Sigma^+ - \Sigma^-)\cdot$ $(z+\bar{z})$, $m \equiv 1(2)$
$Spin^h(2m)$	$1-\Lambda^1 \pm \cdots - \Lambda^{2m-1}+1$; $\Lambda_+^m - \Lambda_-^m$, $m \equiv 0(2)$; $(\Sigma^+ - \Sigma^-)\rho$, $m \equiv 2(4)$	$(\Sigma^+ - \Sigma^-)\rho$, $m \equiv 0(4)$	$\Lambda_+^m - \Lambda_-^m$, $m \equiv 1(2)$; $(\Sigma^+ - \Sigma^-)\rho$, $m \equiv 1(2)$
$U(m)$	$\sum_{k=0}^m (-1)^k (\Lambda^{k,0} + \Lambda^{0,k})$	$\sum (-1)^k (\Lambda^{k,0}$ $+\Lambda^{0,k})$	$\sum (-1)^k (\Lambda^{k,0}$ $-\Lambda^{0,k})$
$SU(m)$	$\sum_{k=0}^m (-1)^k \Lambda^{k,0}$, $m \equiv 0(4)$	$\sum (-1)^k \Lambda^{k,0}$, $m \equiv 2(4)$	$\sum (-1)^k \Lambda^{k,0}$, $m \equiv 1(2)$

G	reelle Erz.	quat. Erz.	antis. Erz.
$Sp(q)Sp(1)$, q gerade	$\Sigma^+ - \Sigma^-$	-	-
$Sp(q)Sp(1)$, q ungerade	$(\Sigma^+ - \Sigma^-) \cdot \rho$, $(\Sigma^+ - \Sigma^-) \cdot \Lambda^{1,0}$, $(\Sigma^+ - \Sigma^-) \cdot \Lambda^{3,0}$, $\vdots$ $(\Sigma^+ - \Sigma^-) \cdot \Lambda^{q,0}$	-	-
$Sp(q)U(1)$, q gerade	$\Sigma^+ - \Sigma^-$	-	-
$Sp(q)U(1)$, q ungerade	$(\Sigma^+ - \Sigma^-) \cdot (z + \bar{z})$, $(\Sigma^+ - \Sigma^-) \cdot \Lambda^{1,0}$, $(\Sigma^+ - \Sigma^-) \cdot \Lambda^{3,0}$, $\vdots$ $(\Sigma^+ - \Sigma^-) \cdot \Lambda^{q,0}$	$(\Sigma^+ - \Sigma^-) \cdot (z + \bar{z})$	$(\Sigma^+ - \Sigma^-) \cdot (z - \bar{z})$
$Sp(q)$	$\Sigma^+ - \Sigma^-$, $q \equiv 0(2)$	$\Sigma^+ - \Sigma^-$, $q \equiv 1(2)$	-

Für die restlichen Gruppen geben wir den Typ der Erzeuger der besseren Übersicht halber in einzelnen Tabellen an.

$G = G(2m, 2l)$			
Erzeuger	reell	quatern.	antiselbstk.
$1 - \Lambda^1 \pm \cdots - \Lambda^{2m-1} + 1$	immer	-	-
$\Lambda^m_+ - \Lambda^m_-$	$m \equiv 0(2)$	-	$m \equiv 1(2)$
$(\Sigma^+ - \Sigma^-)(\tilde{\Sigma}^+ - \tilde{\Sigma}^-)$	$m, l \equiv 0(2)$ & $m + l \equiv 0(4)$ oder $m, l \equiv 1(2)$	$m, l \equiv 0(2)$ & $m + l \equiv 2(4)$ oder $m, l \equiv 1(2)$	$m + l \equiv 1(2)$
$(\Sigma^+ - \Sigma^-)(\tilde{\Sigma}^+ + \tilde{\Sigma}^-)$	$m \equiv 0(4)$ & $l \equiv 0, 1, 3(4)$ oder $m \equiv 2(4)$ & $l \equiv 1, 2, 3(4)$	$m \equiv 0(4)$ & $l \equiv 1, 2, 3(4)$ oder $m \equiv 2(4)$ & $l \equiv 0, 1, 3(4)$	$m + l \equiv 1(2)$

$G = G(2m, 2l + 1)$			
Erzeuger	reell	quatern.	antiselbstk.
$1 - \Lambda^1 \pm \cdots - \Lambda^{2m-1} + 1$	immer	-	-
$\Lambda^m_+ - \Lambda^m_-$	$m \equiv 0(2)$	-	$m \equiv 1(2)$
$(\Sigma^+ - \Sigma^-)\tilde{\Sigma}$	$m \equiv 0(2)$ & $m + l \equiv 0, 3(4)$	$m \equiv 0(2)$ & $m + l \equiv 1, 2(4)$	$m \equiv 1(2)$

$G = G(2m, 2l, 2)$			
Erzeuger	reell	quatern.	antiselbstk.
$1 - \Lambda^1 \pm \cdots - \Lambda^{2m-1} + 1$	immer	-	-
$\Lambda_+^m - \Lambda_-^m$	$m \equiv 0(2)$	-	$m \equiv 1(2)$
$(\Sigma^+ - \Sigma^-)(\tilde{\Sigma}^+ - \tilde{\Sigma}^-)(z + \bar{z})$	$m + l \equiv 0(2)$	$m + l \equiv 0(2)$	$m + l \equiv 1(2)$
$(\Sigma^+ - \Sigma^-)(\tilde{\Sigma}^+ - \tilde{\Sigma}^-)(z - \bar{z})$	$m + l \equiv 1(2)$	$m + l \equiv 1(2)$	$m + l \equiv 0(2)$
$(\Sigma^+ - \Sigma^-)(\tilde{\Sigma}^+ + \tilde{\Sigma}^-)(z + \bar{z})$	$m \equiv 0(2)$	$m \equiv 0(2)$	$m \equiv 1(2)$
$(\Sigma^+ - \Sigma^-)(\tilde{\Sigma}^+ + \tilde{\Sigma}^-)(z - \bar{z})$	$m \equiv 1(2)$	$m \equiv 1(2)$	$m \equiv 0(2)$

$G = G(2m, 2l + 1, 2)$			
Erzeuger	reell	quatern.	antiselbstk.
$1 - \Lambda^1 \pm \cdots - \Lambda^{2m-1} + 1$	immer	-	-
$\Lambda_+^m - \Lambda_-^m$	$m \equiv 0(2)$	-	$m \equiv 1(2)$
$(\Sigma^+ - \Sigma^-)\tilde{\Sigma}(z + \bar{z})$	$m \equiv 0(2)$	$m \equiv 0(2)$	$m \equiv 1(2)$
$(\Sigma^+ - \Sigma^-)\tilde{\Sigma}(z - \bar{z})$	$m \equiv 1(2)$	$m \equiv 1(2)$	$m \equiv 0(2)$

3. Charakteristische Klassen und Indextheorie

In diesem Kapitel werden wir Tatsachen aus der Indextheorie für elliptische Operatoren zusammenstellen und sie in einer für unsere Anwendungen günstigen Form präsentieren. Wir beginnen mit einer kurzen Beschreibung der rationalen Kohomologie klassifizierender Räume und einiger universeller charakteristischer Klassen.

Sei G eine kompakte zusammenhängende Lie-Gruppe, sei BG ihr klassifizierender Raum und EG das universelle G-Prinzipalbündel über BG. Dabei bedeutet *universell*, daß es für jedes G-Prinzipalbündel $\mathcal{P}$ über einem Raum M eine (bis auf Homotopie eindeutige) Abbildung $\Phi_{\mathcal{P}} : M \to BG$ gibt, so daß $\mathcal{P} = \Phi_{\mathcal{P}}^* EG$. Zu jedem virtuellen G-Modul $V \in R(G)$ können wir das assoziierte virtuelle Vektorbündel $EG \times_G V$ bilden und erhalten auf diese Weise einen Homomorphismus $R(G) \to K(BG)$. Weiterhin bildet der *Chern-Charakter* $K(BG) \to H^{**}(BG; \mathbb{Q})$ einen Ringhomomorphismus. Die Verkettung dieser beiden Homomorphismen $ch : R(G) \to H^{**}(BG; \mathbb{Q})$ nennen wir den *universellen Chern-Charakter*. Der Chern-Charakter eines zu einem G-Modul assoziierten Bündels ist dann der Pull-Back des universellen Chern-Charakters, d.h. $ch(\mathcal{P} \times_G V) = \Phi_{\mathcal{P}}^* ch(V)$.

Analog haben wir die *universelle Chern-Klasse* $c : R(G) \to H^{**}(BG; \mathbb{Q})$, die allerdings kein Ringhomomorphismus ist, sondern nur der Bedingung $c(V + W) = c(V) \cdot c(W)$ genügt.

Um diese Abbildungen expliziter zu machen, empfiehlt es sich, die ganze Situation auf einen maximalem Torus von G einzuschränken. Sei zunächst T irgendein m-dimensionaler Torus. Dann ist $R(T) = \mathbb{Z}[z_1, z_1^{-1}, \dots, z_m, z_m^{-1}]$, wobei z_i die Standarddarstellung des i-ten S^1-Faktors ist. Wir setzen $x_i = c_1(z_i) \in H^2(BT; \mathbb{Q})$. Es ist wohlbekannt, daß $H^{**}(BT; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[[x_1, \dots, x_m]]$, vgl. [9]. Der universelle Chern-Charakter ist bestimmt durch $ch(z_i) = e^{x_i}$ und die Chern-Klasse durch $c(z_1^{d_1} \cdots z_m^{d_m}) = 1 + d_1 x_1 + \cdots + d_m x_m$.

Sei jetzt $T \subset G$ ein maximaler Torus. Dann haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R(G) & \xrightarrow{ch} & H^{**}(BG; \mathbb{Q}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R(T) & \xrightarrow{ch} & H^{**}(BT; \mathbb{Q}) \end{array} \tag{56}$$

Dabei sind die vertikalen Pfeile injektiv, genauer wird $R(G)$ mit dem unter der *Weyl-Gruppe* $W(G)$ invarianten Unterraum $R(T)^{W(G)}$ identifiziert, und $H^{**}(BG; \mathbb{Q})$ mit $H^{**}(BT; \mathbb{Q})^{W(G)}$.

Sei nun für den Moment $G = SO(2m)$, $T = SO(2) \times \cdots \times SO(2) \subset SO(2m)$ der maximale Standardtorus. Wir definieren die *universelle $\hat{A}$-Klasse* durch

$$\hat{\mathcal{A}} = \prod_{i=1}^{m} \frac{x_i/2}{sinh(x_i/2)}. \tag{57}$$

Eine Vertauschung der x_i oder Einführung von Minuszeichen vor einer geraden Anzahl von x_i ändert nichts an $\hat{\mathcal{A}}$, d.h. $\hat{\mathcal{A}}$ ist invariant unter $W(SO(2m))$. Daher ist $\hat{\mathcal{A}}$ ein wohldefiniertes Element von $H^{**}(BSO(2m); \mathbb{Q})$. Analog ist die *universelle Euler-Klasse* definiert durch

$$e = x_1 \cdots x_m \in H^{**}(BSO(2m); \mathbb{Q}). \tag{58}$$

Sei jetzt G wieder eine allgemeine kompakte zusammenhängende Lie-Gruppe, und sei $\pi : \tilde{G} \to G$ eine endliche Überlagerung. Dann ist $\pi^* : R(G) \to R(\tilde{G})$ injektiv und $\pi^* : H^{**}(BG; \mathbb{Q}) \to H^{**}(B\tilde{G}; \mathbb{Q})$ sogar ein Isomorphismus.

BEISPIEL 3.1. Sei $\tilde{G} = Spin(2m)$, $G = SO(2m)$, $\pi_1 : Spin(2m) \to SO(2m)$ die zweifache Überlagerung. Identifiziert man den maximalen Torus $T_{SO(2m)}$ von $SO(2m)$ mit $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$, so ist der maximale Torus $T_{Spin(2m)}$ bekanntlich gegeben durch $T_{Spin(2m)} = \mathbb{R}^m/\Lambda$, wobei $\Lambda = \{(k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m \mid k_1 + \cdots + k_m \text{ ist gerade}\}$. Um keine komplizierten Koordinaten für $T_{Spin(2m)}$ einführen zu müssen, betrachten wir noch den Torus $\hat{T} = \mathbb{R}^m/(2\mathbb{Z})^m$ und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{id} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{id} & \mathbb{R}^m \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{T} & \xrightarrow{\pi_2} & T_{Spin(2m)} & \xrightarrow{\pi_1} & T_{SO(2m)} \end{array}$$

Dann ist $(\pi_2 \circ \pi_1)^* : R(T_{SO(2m)}) \to R(\hat{T})$ gegeben durch $z_i \to z_i^2$ und $(\pi_2 \circ \pi_1)^* : H^{**}(BT_{SO(2m)}; \mathbb{Q}) \to H^{**}(B\hat{T}; \mathbb{Q})$ durch $x_i \to 2x_i$.

Daher ist $(\pi_2 \circ \pi_1)^* \hat{\mathcal{A}} = \prod_{i=1}^m \frac{x_i}{sinh(x_i)}$ und $(\pi_2 \circ \pi_1)^* e = 2^m x_1 \cdots x_m$.

Wir berechnen nun den universellen Chern-Charakter von $\Sigma^+ - \Sigma^- \in R(Spin(2m))$. $\Sigma^+ - \Sigma^-$ hat die Gewichte $z_1^{\epsilon_1} \cdot \ldots \cdot z_m^{\epsilon_m}$ mit Multiplizität $\epsilon_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_m$, $\epsilon_i = \pm 1$, d.h. $\pi_2^*(\Sigma^+ - \Sigma^-)|T = \sum \epsilon_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_m z_1^{\epsilon_1} \cdot \ldots \cdot z_m^{\epsilon_m}$. Also folgt

$$\begin{aligned} \pi_2^* ch(\Sigma^+ - \Sigma^-) &= \sum_{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m} \epsilon_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_m e^{\epsilon_1 x_1} \cdot \ldots \cdot e^{\epsilon_m x_m} \\ &= \prod_{i=1}^m (e^{x_i} - e^{-x_i}) \\ &= 2^m \prod_{i=1}^m sinh(x_i) \\ &= (\pi_1 \circ \pi_2)^* (e \cdot \hat{\mathcal{A}}^{-1}) \qquad (59) \end{aligned}$$

und somit

$$ch(\Sigma^+ - \Sigma^-) = \pi_1^*(e \cdot \hat{\mathcal{A}}^{-1}). \qquad (60)$$

Bei der kohomologischen Formulierung des Indexsatzes von Atiyah und Singer muß im Integranden durch die Euler-Klasse dividiert werden. Daher benötigt man eine Voraussetzung, die sicherstellt, daß das auch möglich ist, genauer muß man verlangen, daß $\tau^*(e) \in H^{**}(BG; \mathbb{Q})$ nicht verschwindet, wobei $(\mathcal{P}, G, \mathbb{R}^n, \tau)$ eine G-Struktur von M ist. Das folgende Lemma besagt, daß wir uns bei transitiven G-Strukturen darüber keine Gedanken zu machen brauchen.

Lemma 3.2. *Sei G eine kompakte zusammenhängende Lie-Gruppe, sei $\tau : G \to SO(2m)$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus, sei $T \subset G$ ein maximaler Torus. Wir verlangen, daß G unter τ transitiv auf $S^{2m-1} \subset \mathbb{R}^{2m}$ operiert.*

Dann hat T unter τ keinen Fixvektor ($\neq 0$) in $\mathbb{R}^{2m}$.

Beweis. Angenommen, T hat einen Fixvektor $x_0 \in S^{2m-1}$. Wir setzen $G' = \tau(G) \subset SO(2m)$ und $T' = \tau(T)$. T' ist maximaler Torus von G', und x_0 ist Fixvektor von T'. Sei H' die Isotropieuntergruppe von G' zu x_0, d.h. $H' = \{g \in G' \mid gx_0 = x_0\}$. Dann ist $T' \subset H'$, d.h. H' und G' haben denselben Rang. Ein Blick auf die Klassifikation der transitiv und effektiv auf Sphären operierenden Gruppen (siehe Beweis von Lemma 1.8) zeigt, daß dies in geraden Dimensionen $2m$ niemals der Fall ist. □

Man beachte, daß Lemma 3.2 in ungeraden Dimensionen $2m + 1$ nicht richtig ist. Nun liefert [2, Prop. 2.17], kombiniert mit Lemma 3.2 und [15, Prop. 11.14], folgende Version des Indexsatzes von Atiyah und Singer.

Satz 3.3. Indexsatz von Atiyah und Singer
Sei M eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 2m$, sei $(\mathcal{P}, G, \mathbb{R}^n, \tau)$ eine transitive G-Struktur von M. $\Phi_{\mathcal{P}} : M \to BG$ sei klassifizierende Abbildung zu $\mathcal{P}$. Seien V_1 und V_2 komplexe G-Moduln, und seien $E_i = \mathcal{P} \times_G V_i$ die assoziierten Vektorbündel. Sei $D : C^\infty(M, E_1) \to C^\infty(M, E_2)$ ein elliptischer Pseudodifferentialoperator.

Dann wird der Index von D gegeben durch

$$\mathrm{index}(D) = (-1)^m \int_M \left\{ \Phi_{\mathcal{P}}^* \left(\frac{ch(V_1) - ch(V_2)}{\tau^*(e)} \right) \cdot \hat{\mathcal{A}}(TM)^2 \right\}.$$

Insbesondere ist $\tau^*(e) \neq 0$ in $H^{**}(BG; \mathbb{Q})$. □

Bemerkung 3.4. Häufig schreibt man für den Index etwas lax die Formel

$$\mathrm{index}(D) = (-1)^m \int_M \left\{ \frac{ch(E_1) - ch(E_2)}{e(TM)} \cdot \hat{\mathcal{A}}(TM)^2 \right\}.$$

Dabei ist aber zu beachten, daß $e(TM)$ durchaus 0 sein kann, und wir hätten 0 durch 0 zu dividieren. Die präzise Formulierung ist die aus Satz 3.3.

Wir wollen noch einen Spezialfall des Atiyah-Singer-Indexsatzes betrachten, nämlich den, daß der Operator lokal ein getwisteter Dirac-Operator ist. Unsere Strukturgruppe G wird im allgemeinen keine Spin-Struktur induzieren, d.h. $\tau : G \to SO(n)$ wird sich i.a. nicht zu einem Homomorphismus $\tilde{\tau} : G \to Spin(n)$ liften lassen. In jedem Fall aber gibt es eine endliche Überlagerung $\pi : \tilde{G} \to G$, so daß das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & Spin(n) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_1 \\ G & \xrightarrow{\tau} & SO(n) \end{array} \tag{61}$$

Seien nun V_1 und V_2 zwei komplexe G-Moduln mit $\pi^* V_1 = \tilde{\tau}^*(\Sigma^+) \cdot W$ und $\pi^* V_2 =$

$\tilde{\tau}^*(\Sigma^-) \cdot W$, wobei W ein $\tilde{G}$-Modul ist. Dann folgt unter Verwendung von (60)

$$\begin{aligned}
\pi^*\left(\frac{ch(V_1 - V_2)}{\tau^*(e)}\tau^*\hat{\mathcal{A}}^2\right) &= ch(W) \cdot \tilde{\tau}^*\left(\frac{ch(\Sigma^+ - \Sigma^-)}{\pi_1^*(e)}\pi_1^*(\hat{\mathcal{A}}^2)\right) &(62)\\
&= ch(W) \cdot \tilde{\tau}^*\pi_1^*\hat{\mathcal{A}} &(63)\\
&= ch(W) \cdot \pi^*\tau^*\hat{\mathcal{A}}. &(64)
\end{aligned}$$

In dieser Situation erhalten wir somit für den Index

$$\operatorname{index}(D) = (-1)^m \int_M \{\Phi_{\mathcal{P}}^*((\pi^*)^{-1}ch(W)) \cdot \hat{\mathcal{A}}(TM)\}. \tag{65}$$

Eine der häufigsten Anwendungen des Indexsatzes geht wie folgt. Angenommen, eine kompakte Mannigfaltigkeit besitzt eine G-Struktur. Dann konstruiert man einen elliptischen Operator zwischen zwei zu G-Moduln gehörigen Vektorbündeln und berechnet dessen Index mit Satz 3.3. Der topologische Ausdruck für den Index muß also insbesondere eine ganze Zahl sein. Im allgemeinen ist er nur eine rationale Zahl, da er sich aus rationalen Kohomologieklassen berechnet. Ist also umgekehrt der topologische Ausdruck keine ganze Zahl, dann kann die Mannigfaltigkeit keine G-Struktur besitzen.

In Satz 1.1 haben wir ein Konstruktionsverfahren für elliptische Operatoren angegeben. Kombinieren wir Satz 1.1 mit Satz 3.3, so erhalten wir

Satz 3.5. Allgemeiner Ganzzahligkeitssatz
Sei M eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit der geraden Dimension $n = 2m$, sei G eine kompakte zusammenhängende Lie-Gruppe, sei $(\mathcal{P}, G, \mathbb{R}^n, \tau)$ eine transitive G-Struktur von M. Sei ferner $\Phi_{\mathcal{P}} : M \to BG$ die klassifizierende Abbildung für $\mathcal{P}$. Zu $x_0 \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ sei $H \subset G$ die Isotropieuntergruppe.

Dann ist für jedes $V \in R(G, H)$ die rationale Zahl

$$\int_M \left\{\Phi_{\mathcal{P}}^*\left(\frac{ch(V)}{\tau^*(e)}\right) \cdot \hat{\mathcal{A}}(TM)^2\right\}$$

eine ganze Zahl.

Ist $V \in RSP(G, H)$, dann ist $\int_M\{\Phi_{\mathcal{P}}^*(\frac{ch(V)}{\tau^*(e)}) \cdot \hat{\mathcal{A}}(TM)^2\}$ sogar eine gerade Zahl.
□

Der Zusatz für $V \in RSP(G, H)$ folgt daraus, daß dann der zugehörige elliptische Operator quaternionisch gewählt werden kann, und sein Kern und Kokern somit quaternionische Vektorräume sind, insbesondere durch 2 teilbare komplexe Dimension haben.

Für lokale getwistete Dirac-Operatoren kann man unter geeigneten Positivitätsvoraussetzungen an die Krümmung den Ganzzahligkeitssatz zu einem Verschwindungssatz verbessern. Nehmen wir dazu nochmals an, wir haben ein kommutatives Diagramm wie in (61), ferner G-Moduln V_1 und V_2, so daß $\pi^*V_1 = W \cdot \tilde{\tau}(\Sigma^+)$ und $\pi^*V_2 = W \cdot \tilde{\tau}(\Sigma^-)$ mit einem $\tilde{G}$-Modul W. Sei $(\mathcal{P}, G, \mathbb{R}^n, \tau)$ eine transitive G-Struktur der kompakten Mannigfaltigkeit M, E_i die zu V_i assoziierten Vektorbündel über M. $E = E_1 \oplus E_2$ trage einen Zusammenhang ∇, der von einer Zusammenhangsform ω auf $\mathcal{P}$ induziert wird.

Lokal können wir $\mathcal{P}$ mit ω zu einem $\tilde{G}$-Prinzipalbündel $\tilde{\mathcal{P}}$ mit Zusammenhangsform $\tilde{\omega}$ liften. Dann schreibt sich lokal $E = \Sigma M \otimes F$, wobei ΣM das Spinorbündel ist, und $F = \tilde{\mathcal{P}} \times_{\tilde{G}} W$. Schreibt sich nun der Zusammenhang ∇ als Produktzusammenhang $\nabla = \nabla^1 \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^2$, wobei ∇^1 der Levi-Civita-Zusammenhang auf dem Spinorbündel ist, dann nennen wir ω *zulässig*.

Sei von jetzt ab ω zulässig. Dann wird durch die Formel

$$\mathcal{R}^{\omega,W}(\sigma \otimes \phi) = \sum_{i<j} (e_i \cdot e_j \cdot \sigma) \otimes (R^{\nabla^2}(e_i, e_j)\phi) \tag{66}$$

ein symmetrisches Endomorphismenfeld auf E erklärt, wobei $e_1, \ldots, e_n$ ein lokaler Orthonormalrahmen von TM ist, die e_i operieren durch Cliffordmultiplikation auf den Spinoren, und R^{∇^2} ist der Krümmungstensor zu ∇^2. In jedem Punkt $x \in M$ bezeichnen wir den Betrag des betragsmäßig größten Eigenwertes von $\mathcal{R}^{\omega,W}|_x$ mit $|\mathcal{R}^{\omega,W}|_x|$.

Für eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ auf einer kompakten n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit M bezeichnen wir den kleinsten Eigenwert des Operators $4\frac{n-1}{n-2}\triangle + f$ mit $\mu(f)$. Dabei ist $\triangle = d^*d$ der Laplace-Beltrami-Operator auf Funktionen. Es sei daran erinnert, daß $\mu(S)$ bei der Behandlung des Yamabe-Problems eine wichtige Rolle spielt, wobei S die Skalarkrümmung von M ist. Wir werden es mit der Bedingung $\mu(f) > 0$ zu tun haben, die eine Abschwächung der Bedingung $f > 0$ ist, denn für $f > 0$ ist auch $\mu(f) > 0$, aber $\mu(f)$ ist z.B. auch dann strikt positiv, wenn $f \geq 0$ und $f \not\equiv 0$.

Nun können wir den Verschwindungssatz formulieren. Er folgt direkt aus der Eigenwertabschätzung [3, Thm. 3] und der Formel [15, Thm. 8.17].

Satz 3.6. Verschwindungssatz für getwistete Dirac-Operatoren
Sei M eine kompakte differenzierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $n = 2m$ gerade, $(\mathcal{P}, G, \mathbb{R}^n, \tau)$ eine transitive G-Struktur von M, $\pi : \tilde{G} \to G$ eine endliche Überlagerung, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & Spin(n) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_1 \\ G & \xrightarrow{\tau} & SO(n) \end{array}$$

Seien V_1 und V_2 komplexe G-Moduln, W komplexer $\tilde{G}$-Modul, so daß $\pi^*V_1 = \tilde{\tau}^*(\Sigma^+) \cdot W$ und $\pi^*V_2 = \tilde{\tau}^*(\Sigma^-) \cdot W$. Sei ferner ω ein zulässiger Zusammenhang auf $\mathcal{P}$, S die Skalarkrümmung von M.

Dann gilt, falls $\mu(S - 4|\mathcal{R}^{\omega,W}|) > 0$ ist, daß

$$\int_M \{\Phi^*_{\mathcal{P}}((\pi^*)^{-1}ch(W)) \cdot \hat{\mathcal{A}}(TM)\} = 0. \square$$

Zum Abschluß dieses Kapitels leiten wir nun noch eine Formel her, die es gestattet, aus dem Chern-Charakters eines Bündels E den Chern-Charakter seiner äußeren Potenzen $\Lambda^k E$ zu berechnen.

Sei also M ein topologischer Raum, E ein komplexes Vektorbündel über M. Wir wollen $ch(\Lambda^k E)$ aus $ch(E)$ berechnen. Sei dazu $\rho_k : H^{2*}(M;\mathbb{Q}) \to H^{2*}(M;\mathbb{Q})$ die *Adams-Operation*, d.h. auf $H^{2m}(M;\mathbb{Q})$ ist ρ_k Multiplikation mit k^m.

Lemma 3.7. *Wir können $ch(\Lambda^k E)$ induktiv berechnen durch*

$$ch(\Lambda^k E) = \frac{1}{k}\sum_{\mu=1}^{k}(-1)^{\mu+1}\rho_\mu(ch(E))\cdot ch(\Lambda^{k-\mu}E).$$

Beweis. Wir betrachten den universellen Fall und schreiben für die Chern-Klasse

$$c(E) = \prod_i (1+x_i). \tag{67}$$

Dann ist

$$c(\Lambda^k E) = \prod_{i_1<\cdots<i_k}(1+x_{i_1}+\cdots+x_{i_k}) \tag{68}$$

und daher

$$\begin{aligned} ch(\Lambda^k E) &= \sum_{i_1<\cdots<i_k} e^{x_{i_1}+\cdots+x_{i_k}} && (69)\\ &= \frac{1}{k!}\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k\\ \text{paarw. versch.}}} e^{x_{i_1}+\cdots+x_{i_k}}. && (70)\end{aligned}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\begin{aligned} A_\nu(j) &= \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_\nu\\ \text{paarw. versch.}\\ i_\mu\neq j}} e^{x_{i_1}+\cdots+x_{i_\nu}},\ \nu=1,\ldots,k-1, && (71)\\ B_\nu &= \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_\nu\\ \text{paarw. versch.}}} e^{x_{i_1}+\cdots+x_{i_\nu}},\ \nu=1,\ldots,k, && (72)\end{aligned}$$

ferner

$$A_0(j) = B_0 = 1. \tag{73}$$

Induktion über ν liefert

$$A_\nu(j) = \sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^\mu \frac{\nu!}{(\nu-\mu)!}e^{\mu x_j}B_{\nu-\mu}. \tag{74}$$

Also folgt

$$ch(\Lambda^k E) \overset{(70)}{=} \frac{1}{k!}B_k \tag{75}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{k!}\sum_{i_k} e^{x_{i_k}} A_{k-1}(i_k) && (76)\\
&\overset{(74)}{=} \frac{1}{k!}\sum_{i_k} e^{x_{i_k}} \sum_{\mu=0}^{k-1}(-1)^\mu (k-1)\cdots(k-\mu) e^{\mu x_{i_k}} B_{k-1-\mu} && (77)\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{i_k} e^{(\mu+1)x_{i_k}}(-1)^\mu (k-1)\cdots(k-\mu) B_{k-1-\mu} && (78)\\
&\overset{(70)}{=} \frac{1}{k!}\sum_{\mu=0}^{k-1}\rho_{\mu+1}(ch(E))(-1)^\mu (k-1)! ch(\Lambda^{k-\mu-1}E) && (79)\\
&= \frac{1}{k}\sum_{\mu=1}^{k}(-1)^{\mu+1}\rho_\mu(ch(E)) ch(\Lambda^{k-\mu}E). \square
\end{aligned}
$$

Definition 3.8. Für eine (gemischte) Kohomologieklasse $x \in H^{2*}(M;\mathbb{Q})$ setzen wir

$$\lambda^0 x = 1, \lambda^1 x = x \text{ und für } k > 1$$

$$\lambda^k x = \frac{1}{k}\sum_{\mu=1}^{k}(-1)^{\mu+1}\rho_\mu(x)\cdot\lambda^{k-\mu}x.$$

Die Definition ist so gemacht, daß

$$ch(\Lambda^k E) = \lambda^k ch(E). \tag{80}$$

Beispiel 3.9. Als Beispiel berechnen wir die Chern-Charaktere der äußeren Potenzen des holomorphen Tangentialbündels des komplex-projektiven Raumes $\mathbb{CP}^m$. Der Kohomologiering von $\mathbb{CP}^m$ ist $H^*(\mathbb{CP}^m;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a]/(a^{m+1})$, wobei $a \in H^2(\mathbb{CP}^m;\mathbb{Q})$. Sei T das holomorphe Tangentialbündel von $\mathbb{CP}^m$. Es gilt

$$c(T) = (1+a)^{m+1}. \tag{81}$$

Wir setzen $E = T \oplus \mathbb{C}$, wobei $\mathbb{C}$ das triviale komplexe Geradenbündel bezeichnet. Dann ist auch $c(E) = (1+a)^{m+1}$ und da E Rang $m+1$ hat, folgt

$$ch(E) = (m+1)e^a. \tag{82}$$

Wir zeigen zunächst durch Induktion über k, daß

$$ch(\Lambda^k E) = \binom{m+1}{k} e^{ka}. \tag{83}$$

Für $k = 1$ wissen wir die Behauptung bereits. Für $k > 1$ gilt nach Lemma 3.7

$$ch(\Lambda^k E) = \frac{1}{k}\sum_{\mu=1}^{k}(-1)^{\mu+1}\rho_\mu(ch(E)) ch(\Lambda^{k-\mu}E) \tag{84}$$

$$= \quad \frac{1}{k}\sum_{\mu=1}^{k}(-1)^{\mu+1}(m+1)e^{\mu a}\begin{pmatrix} m+1 \\ k-\mu \end{pmatrix} e^{(k-\mu)a} \tag{85}$$

$$= \quad \frac{m+1}{k}\left\{\sum_{\mu=1}^{k}(-1)^{\mu+1}\begin{pmatrix} m+1 \\ k-\mu \end{pmatrix}\right\} e^{ka} \tag{86}$$

$$= \quad \frac{m+1}{k}\left\{\sum_{\mu=1}^{k}(-1)^{\mu+1}\left[\begin{pmatrix} m \\ k-\mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ k-\mu-1 \end{pmatrix}\right]\right\} e^{ka} \tag{87}$$

$$= \quad \frac{m+1}{k}\begin{pmatrix} m \\ k-1 \end{pmatrix} e^{ka} \tag{88}$$

$$= \quad \begin{pmatrix} m+1 \\ k \end{pmatrix} e^{ka}. \tag{89}$$

Nun gilt $\Lambda^k E = \Lambda^k T \oplus \Lambda^{k-1} T$. Daraus und aus (83) folgt schließlich

$$ch(\Lambda^k T) = \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}\begin{pmatrix} m+1 \\ \nu \end{pmatrix} e^{\nu a}. \tag{90}$$

4. Spin- und Spin^c-Mannigfaltigkeiten

Wir wenden jetzt den allgemeinen Ganzzahligkeitssatz und Verschwindungssatz aus dem vorangegangenen Kapitel auf Spin- und Spin^c-Mannigfaltigkeiten an. Für eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit gerader Dimension n nennen wir $\hat{A}(M) = \int_M \hat{\mathcal{A}}(TM)$ das *$\hat{A}$-Geschlecht* von M. Für Spin-Mannigfaltigkeiten liefert Satz 3.5:

Satz 4.1. (Atiyah-Hirzebruch [1, Cor. 2])
Sei M eine kompakte Spin-Mannigfaltigkeit der geraden Dimension n, sei $\mathcal{P} \to M$ das $Spin(n)$-Prinzipalbündel, sei $V \in R(Spin(n))$. Dann ist

$$\int_M ch(\mathcal{P} \times_{Spin(n)} V)\hat{\mathcal{A}}(TM)$$

eine ganze Zahl.

Insbesondere ist das $\hat{A}$-Geschlecht einer kompakten Spin-Mannigfaltigkeit eine ganze Zahl.

Ist darüberhinaus $n \equiv 4(8)$, dann ist das $\hat{A}$-Geschlecht sogar durch 2 teilbar. □

Dieser Satz ist eine der ältesten Anwendungen des Indexsatzes von Atiyah und Singer. In der Tat hat die Ganzzahligkeit des $\hat{A}$-Geschlechts von Spin-Mannigfaltigkeiten die Suche nach dem Indexsatz in den fünfziger Jahren entscheidend mit motiviert.

Der Verschwindungssatz 3.6 liefert

Satz 4.2. *Sei M eine kompakte Spin-Mannigfaltigkeit gerader Dimension mit Skalarkrümmung S.*

Dann folgt aus $\mu(S) > 0$, daß $\hat{A}(M) = 0$. □

Zur Diskussion der Bedingung $\mu(f) > 0$ siehe das dritte Kapitel; sie ist eine Abschwächung der Bedingung $f > 0$. Satz 4.2 folgt auch direkt aus Hijazis Eigenwertabschätzung [12]; im Fall $S > 0$ geht er auf Lichnerowicz [16] zurück.

Wenden wir uns nun der Diskussion von Spin^c-Mannigfaltigkeiten zu. Wir haben die exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to Spin^c(n) \to SO(n) \times U(1) \to 0. \tag{91}$$

Dem $U(1)$-Faktor entspricht das *kanonische Geradenbündel* L über der Spin^c-Mannigfaltigkeit M. Der Ausschnitt

$$H^1(M; Spin^c(n)) \longrightarrow H^1(M; SO(n)) \oplus H^1(M; U(1)) \xrightarrow{w_2} H^2(M; \mathbb{Z}_2) \tag{92}$$

aus der exakten Kohomologiesequenz zeigt, daß L genau dann kanonisches Geradenbündel einer $Spin^c$-Struktur ist, wenn $w_2(L) = w_2(M)$, d.h. genau dann, wenn $w_2(M)$ die mod2-Reduktion der ersten Chern-Klasse von L ist.

Satz 4.3. (Atiyah-Hirzebruch [1, Cor. 1])
Sei M eine kompakte Spin^c-Mannigfaltigkeit der geraden Dimension n, sei $\mathcal{P}$ das Spin$^c(n)$-Prinzipalbündel, sei $c \in H^2(M;\mathbb{Z})$ mit $c \equiv w_2(M)$ mod 2, sei schließlich $W \in R(Spin^c(n))$. Dann ist

$$\int_M ch(\mathcal{P} \times_{Spin^c(n)} W) e^{c/2} \hat{\mathcal{A}}(TM)$$

eine ganze Zahl. Insbesondere ist

$$\int_M e^{c/2} \hat{\mathcal{A}}(TM)$$

ganz.

Beweis. Wegen $c \equiv w_2(M)$ mod 2 ist $c = c_1(L)$, wobei L das kanonische Geradenbündel zu einer Spin^c-Struktur von M ist. Ist $\mathcal{P}$ das $Spin^c(n)$-Prinzipalbündel über M, dann ist $L = \mathcal{P} \times_{Spin^c(n)} z^2$. Der Satz folgt nun aus Satz 3.5 mit $V = (\Sigma^+ - \Sigma^-) \cdot z \cdot W$. $\square$

Satz 4.4. *Sei M eine Spin^c-Mannigfaltigkeit gerader Dimension $n = 2m$ mit Skalarkrümmung S. Sei $c \in H^2(M;\mathbb{Z})$ mit $c \equiv w_2(M)$ mod 2, Ω sei eine geschlossene 2-Form, die das Bild von c in $H^2(M;\mathbb{R})$ repräsentiert.*

Dann gilt, falls $\mu(S - 4\pi|\Omega|) > 0$,

$$\int_M e^{c/2} \hat{\mathcal{A}}(TM) = 0.$$

Dabei ist $|\Omega|$ definiert durch $|\Omega| = \sum_{i=1}^m |\lambda_i|$, wobei $\Omega = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_{2i-1} \wedge e_{2i}$ in Normalform geschrieben ist. Dieser Verschwindungssatz ist eine Verallgemeinerung eines Resultats von Hitchin [13, Thm. 1.1], der ihn unter der Voraussetzung $S > 4\pi|\Omega|$ bewiesen hat.

Beweis von Satz 4.4. Wegen $c \equiv w_2(M)$ mod 2 ist $c = c_1(L)$, wobei L das kanonische Geradenbündel zu einer Spin^c-Struktur von M ist. Sei ∇^0 ein beliebiger $U(1)$-Zusammenhang auf L, R^0 der zugehörige Krümmungstensor. R^0 kann auch als imaginäre 2-Form angesehen werden und als solche repräsentiert $\frac{1}{2\pi i} R^0$ die erste Chern-Klasse $c_1(L)$. Daher sind Ω und $\frac{1}{2\pi i} R^0$ kohomolog, d.h. es gibt eine 1-Form α, so daß $2\pi i \Omega = R^0 + d\alpha$. Dann wird durch $\hat{\nabla} = \nabla^0 + \alpha$ ein neuer $U(1)$-Zusammenhang auf L erklärt, dessen Krümmung gerade $2\pi i \Omega$ ist.

Der Produktzusammenhang des Levi-Civita-Zusammenhangs mit $\hat{\nabla}$ auf dem $SO(n) \times U(1)$-Prinzipalbündel liftet zu einem zulässigen Zusammenhang ω auf dem $Spin^c(n)$-Prinzipalbündel $\mathcal{P}$. Wir wollen Satz 3.6 auf den Modul $(\Sigma^+ - \Sigma^-) \cdot z$ anwenden. Dazu müssen wir nur noch $|\mathcal{R}^{\omega,z}|$ abschätzen. Lokal schreibt sich das zu

$(\Sigma^+ + \Sigma^-) \cdot z$ gehörige Bündel als $\Sigma M \otimes L^{1/2}$. Die Krümmung auf $L^{1/2}$ ist gerade $\frac{1}{2} \cdot 2\pi i \Omega = \pi i \Omega$.

$$\begin{aligned}
|\mathcal{R}^{\omega,z}(\sigma \otimes \phi)| &= \left| \sum_{k<j} e_k e_j \sigma \otimes \pi i \Omega(e_k, e_j) \phi \right| && (93)\\
&= \pi \left| \sum_{k<j} \Omega(e_k, e_j) e_k e_j \sigma \otimes \phi \right| && (94)\\
&= \pi \left| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_{2i-1} e_{2i} \sigma \otimes \phi \right| && (95)\\
&\leq \pi \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \cdot |\sigma| \cdot |\phi| && (96)\\
&= \pi |\Omega| \cdot |\sigma \otimes \phi|. && (97)
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$|\mathcal{R}^{\omega,z}| \leq \pi |\Omega| \tag{98}$$

und somit

$$\mu(S - 4|\mathcal{R}^{\omega,z}|) \geq \mu(S - 4\pi|\Omega|) > 0. \square \tag{99}$$

5. Spin^h-Mannigfaltigkeiten

Unter einer Spin^h-Mannigfaltigkeit verstehen wir eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit M mit Strukturgruppe $G = Spin^h(n) = \frac{Spin(n)\times Sp(1)}{\{(1,1),(-1,-1)\}}$. Die Spin^h-Mannigfaltigkeiten bilden eine sehr große Klasse von Mannigfaltigkeiten, denn es sind unter anderem alle Spin^c-Mannigfaltigkeiten und alle fast-quaternionischen Mannigfaltigkeiten spin^h. Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Spin^h(n) \longrightarrow SO(n) \times SO(3) \longrightarrow 0 \tag{100}$$

zeigt, daß eine Spin^h-Mannigfaltigkeit ein *kanonisches* $SO(3)$*-Bündel* E hat. Dieses $SO(3)$-Bündel ist das Analogon zum kanonischen Geradenbündel bei Spin^c-Mannigfaltigkeiten.

An dem Ausschnitt aus der exakten Kohomologiesequenz

$$H^1(M; Spin^h(n)) \longrightarrow H^1(M; SO(n)) \oplus H^1(M; SO(3)) \xrightarrow{w_2} H^2(M; \mathbb{Z}_2) \tag{101}$$

sieht man, daß die Bedingung an ein $SO(3)$-Bündel E kanonisches Bündel einer Spin^h-Struktur zu sein gerade

$$w_2(E) = w_2(M) \tag{102}$$

ist. Wir erhalten den folgenden Ganzzahligkeitssatz

Satz 5.1. *Sei M eine kompakte Spin^h-Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 2m$ mit kanonischem $SO(3)$-Bündel E. Sei $p_1(E) \in H^4(M; \mathbb{Z})$ die erste Pontrjagin-Klasse von E.*

Dann ist $p_1(E) \equiv w_2(M)^2$ mod 2 und die rationale Zahl

$$2\int_M \left\{ cosh\left(\frac{\sqrt{p_1(E)}}{2}\right) \hat{\mathcal{A}}(TM) \right\}$$

eine ganze Zahl.

Ist darüberhinaus $W \in R(Spin^h(n))$, $\mathcal{P} \to M$ das $Spin^h(n)$-Prinzipalbündel, dann ist auch

$$2\int_M \left\{ ch(\mathcal{P} \times_{Spin^h(n)} W) cosh\left(\frac{\sqrt{p_1(E)}}{2}\right) \hat{\mathcal{A}}(TM) \right\}$$

eine ganze Zahl.

Beweis. Da die Reduktion von $p_1(E)$ modulo 2 gerade $w_2(E)^2$ ist, folgt der erste Teil der Behauptung aus (102). Wir wenden nun Satz 3.5 mit $V = (\Sigma^+ - \Sigma^-) \cdot \rho$ bzw. $V = (\Sigma^+ - \Sigma^-) \cdot \rho \cdot W$ an. Dazu ist lediglich noch $ch(\rho)$ zu berechnen. Wir rechnen in $H^{**}(B\tilde{G}; \mathbb{Q})$, wobei $\tilde{G} = Spin(n) \times Sp(1)$ die zweifache Überlagerung von $G = Spin^h(n)$ ist. Es ist $R(\tilde{G}) = \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_m, z_0]^{W(\tilde{G})}$ und $H^{**}(B\tilde{G}; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[[x_1, \dots, x_m, x_0]]^{W(\tilde{G})}$. Dabei beziehen sich z_0 und x_0 jeweils auf den $Sp(1)$-Faktor.

Der $Sp(1)$-Modul ρ hat die globalen Gewichte z_0 und z_0^{-1}. Daher gilt für den Chern-Charakter

$$ch(\rho) = e^{x_0} + e^{-x_0} = 2cosh(x_0). \tag{103}$$

Die Komplexifizierung von E ist assoziiert zum Modul $\rho^2 - 1$, der die Gewichte z_0^2, z_0^{-2} und 1 hat. Daher gilt

$$c(E \otimes \mathbb{C}) = (1 + 2x_0)(1 - 2x_0) = 1 - 4x_0^2. \tag{104}$$

Somit ist die erste Pontrjagin-Klasse

$$p_1(E) = 4x_0^2, \tag{105}$$

woraus folgt, daß

$$ch(\rho) = 2cosh\left(\frac{\sqrt{p_1(E)}}{2}\right). \tag{106}$$

Nun folgt die Behauptung aus Satz 3.5. $\square$

Man beachte, daß *cosh* eine gerade Potenzreihe ist, so daß $cosh\left(\frac{\sqrt{p_1(E)}}{2}\right)$ tatsächlich eine Potenzreihe in $p_1(E)$ ist.

Dieser Satz ist ein Spezialfall von K. H. Mayers Ganzzahligkeitssatz [17]. Wir können zwei unmittelbare Folgerungen ziehen.

Korollar 5.2. *Sei M eine kompakte Spin^h-Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 2m$ mit kanonischem $SO(3)$-Bündel E. Ist die erste Pontrjaginklasse $p_1(E)$ von E eine Torsionsklasse, dann ist $2\hat{A}(M)$ eine ganze Zahl.*$\square$

Korollar 5.3. *Sei M eine kompakte Spin^h-Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 2m$, deren vierte Betti-Zahl verschwindet, $b_4(M;\mathbb{R}) = 0$. Dann ist $2\hat{A}(M)$ eine ganze Zahl.*$\square$

Beispiel 5.4. Der komplex-projektive Raum $\mathbb{CP}^m$ ist spin^c und daher auch spin^h. Es gilt $H^*(\mathbb{CP}^m;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[a]/(a^{m+1})$, wobei $a \in H^2(\mathbb{CP}^m;\mathbb{Z})$ ein Erzeuger ist. Die totale $\hat{\mathcal{A}}$-Klasse ist

$$\hat{\mathcal{A}}(T\mathbb{CP}^m) = \left(\frac{a/2}{sinh(a/2)}\right)^{m+1} \tag{107}$$

und für die erste Chern-Klasse des kanonischen Geradenbündels gilt

$$c_1(\Lambda^{m,0}T\mathbb{CP}^m) = c_1(T\mathbb{CP}^m) = (m+1) \cdot a. \tag{108}$$

Im Spin^c-Fall ist die Komplexifizierung des kanonischen $SO(3)$-Bündels gegeben durch

$$E \otimes \mathbb{C} = L \oplus \bar{L} \oplus \mathbb{C}, \tag{109}$$

wobei L das kanonische Geradenbündel ist. In unserem Fall ist $L = \Lambda^{m,0}T\mathbb{CP}^m$. Daher gilt

$$\begin{aligned} c(E \otimes \mathbb{C}) &= (1-(m+1)a)(1+(m+1)a) && (110)\\ &= 1-(m+1)^2a^2 && (111)\end{aligned}$$

und somit

$$p_1(E) = (m+1)^2a^2 \qquad (112)$$

Zur Berechnung der Invariante aus Satz 5.1 müssen wir also den Koeffizienten von a^m aus der Potenzreihe

$$2cosh\left(\frac{(m+1)a}{2}\right)\left(\frac{a/2}{sinh(a/2)}\right)^{m+1} \qquad (113)$$

herausfiltern. Dies bewerkstelligen wir mit dem Residuenkalkül.

$$\begin{aligned} res_0 e^{-(m+1)a/2}\left(\frac{1/2}{sinh(\frac{a}{2})}\right)^{m+1} da &= res_0\left(\frac{\frac{1}{2}e^{-a/2}}{\frac{1}{2}(e^{a/2}-e^{-a/2})}\right)^{m+1} da && (114)\\ &= res_0\left\{\left(\frac{1}{e^a-1}\right)^{m+1} da\right\} && (115)\\ &= res_0\left\{\frac{1}{u^{m+1}(u+1)}du\right\} && (116)\\ &= res_0\left\{\frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u^k}{u^{m+1}}du\right\} && (117)\\ &= (-1)^m && (118)\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Substitution $u = e^a - 1$ gemacht. Analog sieht man, daß

$$res_0\left\{e^{(m+1)a/2}\left(\frac{1/2}{sinh(a/2)}\right)^{m+1} da\right\} = 1. \qquad (119)$$

Daraus folgt

$$2\int_{\mathbb{CP}^m}\left\{cosh\left(\frac{\sqrt{p_1(E)}}{2}\right)\hat{\mathcal{A}}(T\mathbb{CP}^m)\right\} = \begin{cases} 2, m \text{ gerade}\\ 0, m \text{ ungerade}\end{cases} \qquad (120)$$

Man kann Satz 5.1 verwenden, um Teilbarkeitseigenschaften charakteristischer Zahlen von $SO(3)$-Bündeln herzuleiten. Wir geben dazu zwei Beispiele.

Beispiel 5.5. Wir betrachten die $4q$-dimensionale Mannigfaltigkeit $M = \underbrace{S^4 \times \cdots \times S^4}_{q \text{ Faktoren}}$. Sei E ein beliebiges $SO(3)$-Bündel über M.

Dann ist die charakteristische Zahl $\int_M p_1(E)^q$ durch $2^{2q-1}\cdot(2q)!$ teilbar.

Der Beweis geht wie folgt. Da trivialerweise $w_2(E) = 0 = w_2(M)$ gilt, ist E kanonisches Bündel für eine Spin^h-Struktur. Wir bemerken $\hat{A}(M) = \hat{A}(S^4)^q = 1$ und wissen aus Satz 5.1, daß folgender Ausdruck eine ganze Zahl ist:

$$2\int_M cosh\left(\frac{\sqrt{p_1(E)}}{2}\right) = 2\int_M \frac{(\sqrt{p_1(E)}/2)^{2q}}{(2q)!} \tag{121}$$

$$= \frac{1}{2^{2q-1}\cdot(2q)!}\int_M p_1(E)^q.\Box \tag{122}$$

Im Fall $q = 1$ bedeutet das, daß jedes $SO(3)$-Bündel eine durch 4 teilbare erste Pontrjagin-Zahl hat. Es gilt aber generell, daß $SO(3)$-Bündel mit verschwindender zweiter Stiefel-Whitney-Klasse eine durch 4 teilbare erste Pontrjagin-Zahl haben, denn wegen $w_2(E) = 0$ kann E zu einem $SU(2)$-Bündel F angehoben werden, und es gilt $p_1(E) = -4c_2(F)$, vgl. auch [11, App. E].

Beispiel 5.6. Sei E ein beliebiges $SO(3)$-Bündel über $M = \mathbb{CP}^2$.
Dann ist entweder $w_2(E) = 0$ und $\int_M p_1(E) \equiv 0(4)$ oder $w_2(E) = \tilde{a}$ und $\int_M p_1(E) \equiv 1(4)$.
Hierbei ist $\tilde{a}$ die mod2-Reduktion des Erzeugers $a \in H^2(M;\mathbb{Z})$.
Der erste Teil der Aussage folgt aus dem soeben Gesagten. Ist $w_2(E) = \tilde{a} = w_2(M)$, dann ist E kanonisches Bündel einer Spin^h-Struktur und wir können wieder Satz 5.1 anwenden. Folgender Ausdruck muß eine ganze Zahl sein:

$$2\int_M cosh(\sqrt{p_1(E)}/2)\hat{A}(M) = 2\int_M \left(1+\frac{p_1(E)}{8}\right)\left(1-\frac{a^2}{8}\right) \tag{123}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_M p_1(E) - 1\right).\Box \tag{124}$$

Für eine reelle 2-Form Ω auf einem $2m$-dimensionalen euklidischen Vektorraum haben wir bereits im vierten Kapitel eine Norm $|\Omega|$ definiert, nämlich $|\Omega| = \sum_{i=1}^m |\lambda_i|$, wobei $\Omega = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_{2i-1}\wedge e_{2i}$ in Normalform geschrieben ist; $e_1, \ldots, e_{2m}$ ist dabei eine Orthonormalbasis des Vektorraums. Jetzt möge Ω eine 2-Form mit Werten in den Endomorphismen eines weiteren euklidischen Vektorraums E sein. Für $\phi, \psi \in E$ ist $(X,Y) \to \langle\Omega(X,Y)\phi,\psi\rangle$ eine reelle 2-Form, für die wir auch kurz $\langle\Omega(\cdot,\cdot)\phi,\psi\rangle$ schreiben. Wir definieren jetzt die Norm $|\Omega|$ durch

$$|\Omega| = \max_{\substack{\phi,\psi\in E\\ |\phi|=|\psi|=1}} |\langle\Omega(\cdot,\cdot)\phi,\psi\rangle|. \tag{125}$$

Jetzt können wir den Verschwindungssatz für Spin^h-Mannigfaltigkeiten formulieren.

Satz 5.7. *Sei M eine kompakte Spin^h-Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 2m$ mit kanonischem $SO(3)$-Bündel E und Skalarkrümmung S. E trage einen metrischen Zusammenhang ∇^E mit Krümmungstensor R^E.*

Falls $\mu(S - 6|R^E|) > 0$, *dann gilt*

$$\int_M \left\{ cosh\left(\frac{\sqrt{p_1(E)}}{2}\right) \hat{\mathcal{A}}(TM) \right\} = 0.$$

Beweis. Wir wenden Satz 3.6 an mit $\tilde{G} = Spin(n) \times Sp(1)$ und $\pi^* V_1 = \Sigma^+ \cdot \rho$, $\pi^* V_2 = \Sigma^- \cdot \rho$. Der Produktzusammenhang des Levi-Civita-Zusammenhangs mit ∇^E liftet zu einem zulässigen Zusammenhang auf dem $Spin^h(n)$-Prinzipalbündel $\mathcal{P}$. Lokal ist dann der Zusammenhang auf dem zu $\Sigma \cdot \rho$ gehörigen Bündel ein Produktzusammenhang des Levi-Civita-Zusammenhangs auf dem Spinorbündel mit einem Zusammenhang ∇^F, wobei F das lokal existierende Bündel zum Modul ρ ist. ∇^F ist eine lokale ,,Wurzel" von ∇^E, genauer gilt $\nabla^E_X(a \otimes b) = (\nabla^F_X a) \otimes b + a \otimes (\nabla^F_X b)$. An dieser Stelle sei daran erinnert, daß $E \otimes \mathbb{C} = F \otimes F - \mathbb{C}$. Also gilt für die Krümmung

$$R^E(X,Y)(a \otimes b) = (R^F(X,Y)a) \otimes b + a \otimes (R^F(X,Y)b). \tag{126}$$

Wir müssen $|\mathcal{R}^F|$ abschätzen.

$$\begin{aligned}
|\mathcal{R}^F(\sigma \otimes \phi)| &= \left| \sum_{i<j} e_i e_j \sigma \otimes R^F(e_i, e_j)\phi \right| && (127)\\
&= \frac{1}{2|\phi|} \left| \sum_{i<j} e_i e_j \sigma \otimes (\phi \otimes R^F(e_i,e_j)\phi + R^F(e_i,e_j)\phi \otimes \phi) \right| && (128)\\
&= \frac{1}{2|\phi|} \left| \sum_{i<j} e_i e_j \sigma \otimes R^E(e_i,e_j)(\phi \otimes \phi) \right| && (129)\\
&\leq \frac{1}{2} |\mathcal{R}^E| |\sigma \otimes \phi|. && (130)
\end{aligned}$$

Bleibt also $|\mathcal{R}^E|$ abzuschätzen. Sei dazu ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 eine Orthonormalbasis von E über dem betrachteten Punkt.

$$\begin{aligned}
|\mathcal{R}^E(\sigma \otimes \phi)| &= \left| \sum_{i<j} e_i e_j \sigma \otimes \sum_{k=1}^{3} \langle R^E(e_i,e_j)\phi, \phi_k\rangle \phi_k \right| && (131)\\
&\leq \sum_{k=1}^{3} |\phi| \left| \sum_{i<j} \langle R^E(e_i,e_j)\frac{\phi}{|\phi|}, \phi_k\rangle e_i e_j \sigma \otimes \phi_k \right| && (132)\\
&\leq |\phi| \sum_{k=1}^{3} |\langle R^E(\cdot,\cdot)\frac{\phi}{|\phi|}, \phi_k\rangle| |\sigma| && (133)\\
&\leq 3|R^E||\sigma \otimes \phi|. && (134)
\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$\mu(S - 4|\mathcal{R}^F|) \geq \mu(S - 2|\mathcal{R}^E|) \geq \mu(S - 6|R^E|) > 0. \tag{135}$$

Satz 3.6 liefert jetzt die Behauptung. □

Die Spin^h-Mannigfaltigkeiten bilden die natürliche Klasse von Räumen, die sowohl die Spin^c- als auch die fast-quaternionischen Mannigfaltigkeiten umfaßt, ähnlich wie die Spin^c-Mannigfaltigkeiten in natürlicher Weise die Spin- und die fast-komplexen Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. Wir haben jetzt einen Ganzzahligkeitssatz und einen Verschwindungsatz für Spin^h-Mannigfaltigkeiten kennengelernt, wie sie uns ähnlich bereits von Spin^c-Mannigfaltigkeiten vertraut sind. Nun wollen wir noch eine Eigenschaft der Spin^h-Mannigfaltigkeiten betrachten, die sie von den fast-quaternionischen Mannigfaltigkeiten erben; sie haben nämlich einen Twistorraum.

Definition 5.8. Sei M eine Spin^h-Mannigfaltigkeit mit kanonischem $SO(3)$-Bündel E. Dann heißt das Einheitssphärenbündel $Z \subset E$ *Twistorraum* von M.

Satz 5.9. *Der Twistorraum einer Spin^h-Mannigfaltigkeit ist eine Spin^c-Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Sei $\pi : Z \to M$ die Projektion des Twistorraums Z auf M, sei $\mathcal{P}$ das $Spin^h(n)$-Prinzipalbündel über M. Das Tangentialbündel von Z zerlegt sich in $TZ = \pi^* TM \oplus V$, wobei V das vertikale Bündel längs der Fasern in Z ist. Die Fasern sind $S^2 = \mathbb{CP}^1$, daher ist V ein $SO(2)$-Bündel. V hat eine ,,Wurzel", nämlich das komplex-duale des tautologischen Hopf-Bündels längs der Fasern. Anders ausgedrückt heißt das, daß V spin ist und durch ein $Spin(2)$-Bündel induziert wird. Als Gruppen sind zwar $SO(2)$ und $Spin(2)$ dieselben, aber wir schreiben hier V werde durch ein $Spin(2)$-Bündel induziert, um deutlich zu machen, daß V zur Darstellung z^2 und nicht zu z assoziiert ist.

Wegen des nachfolgenden Lemmas 5.10 kann $\pi^*\mathcal{P}$ auf die Strukturgruppe $Spin^c(n)$ reduziert werden. Also besitzt Z eine Reduktion der Strukturgruppe auf $Spin^c(n) \times Spin(2)$. Setzen wir die kanonische Einbettung $Spin^c(n) \hookrightarrow Spin^c(n+2)$ mit der Abbildung $Spin(2) \hookrightarrow Spin(n+2) \hookrightarrow Spin(n+2) \times U(1) \to Spin^c(n+2)$ zusammen, so erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Spin^c(n) \times Spin(2) & \to & Spin^c(n+2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ SO(n) \times SO(2) & \hookrightarrow & SO(n+2) \end{array} \tag{136}$$

Dies liefert uns die Spin^c-Struktur auf Z. $\square$

Lemma 5.10. *Sei M ein topologischer Raum, G eine Lie-Gruppe, $\mathcal{P}$ ein G-Prinzipalbündel über M. Sei ferner F ein topologischer Raum, auf dem G transitiv operiert, sei $\pi : Z = \mathcal{P} \times_G F \to M$ das assoziierte Faserbündel. Zu einem $f_0 \in F$ sei $H = \{g \in G \mid g f_0 = f_0\}$ die Isotropieuntergruppe.*

Dann kann die Strukturgruppe von $\pi^*\mathcal{P}$ auf H reduziert werden.

Beweis. Es gilt

$$\pi^*\mathcal{P} = \{([b,f],b') \mid b,b' \in \mathcal{P} \text{ haben denselben Basispunkt}, f \in F\} \quad (137)$$
$$= \{([b,f],bg) \mid b \in \mathcal{P}, f \in F, g \in G\} \quad (138)$$
$$= \{([b,f_0],bg) \mid b \in \mathcal{P}, g \in G\}. \quad (139)$$

Dann ist das reduzierte H-Prinzipalbündel gegeben durch

$$\hat{\mathcal{P}} = \{([b,f_0],bh) \mid b \in \mathcal{P}, h \in H\}.\square \quad (140)$$

Je mehr Struktur die Ausgangsmannigfaltigkeit M hat, desto mehr Struktur können wir auch vom Twistorraum erwarten. Neben Satz 5.9 fassen wir noch einige Resultate von S. Salamon [20] und L. Bérard Bergery [5] in folgender Tabelle zusammen.

M	Twistorraum Z
Spin^h	Spin^c
fast-quaternionisch	fast-komplex
quaternionisch	komplex
quaternionisch-Kähler mit $Ric \neq 0$	komplexe Kontakt-Struktur
quaternionisch-Kähler mit $Ric > 0$	Kähler-Einstein

6. Fast-quaternionische Mannigfaltigkeiten

Wir wenden nun unsere Aufmerksamkeit einer Klasse von Mannigfaltigkeiten zu, die ein quaternionales Analogon zu den fast-komplexen Mannigfaltigkeiten bilden. Zur Begriffsklärung machen wir einige Definitionen, vgl. [6], [20], [21].

Eine Mannigfaltigkeit mit Strukturgruppe $GL(q,\mathbb{H}) \cdot Sp(1) \subset GL(4q,\mathbb{R})$ heißt *fast-quaternionisch.* Eine solche Mannigfaltigkeit ist dadurch charakterisiert, daß es lokal fast-komplexe Strukturen I, J und $K = IJ = -JI$ gibt, so daß das von I, J und K aufgespannte $SO(3)$-Bündel E global definiert ist. E ist das *kanonische $SO(3)$-Bündel.* Man kann die Strukturgruppe $GL(q,\mathbb{H}) \cdot Sp(1)$ stets auf die maximale kompakte Untergruppe $Sp(q) \cdot Sp(1)$ reduzieren, d.h. man kann eine quaternionisch-hermitesche Metrik wählen. Man spricht dann auch von *fast-quaternionisch-hermiteschen Mannigfaltigkeiten.* Da die Wahl der Metrik für unsere Zwecke weiter keine Rolle spielt, werden wir stets von fast-quaternionischen Mannigfaltigkeiten sprechen und trotzdem die Strukturgruppe $Sp(q) \cdot Sp(1)$ annehmen.

Trägt das $GL(q,\mathbb{H})Sp(1)$-Prinzipalbündel einen torsionsfreien Zusammenhang, dann heißt die Mannigfaltigkeit *quaternionisch.* Trägt sogar das $Sp(q)\cdot Sp(1)$-Bündel einen torsionsfreien Zusammenhang, der dann der Levi-Civita-Zusammenhang der quaternionisch-hermiteschen Metrik ist, dann heißt die Mannigfaltigkeit *quaternionisch-Kähler.* Das kann man auch so ausdrücken, daß quaternionisch-Kähler-Mannigfaltigkeiten gerade Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Holonomie in $Sp(q) \cdot Sp(1)$ sind.

Lemma 6.1. *Sei M eine fast-quaternionische Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 4q$. Dann ist M spin^h und, falls q gerade ist, sogar spin.*

Beweis. Für jedes q haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Sp(q) \times Sp(1) & \xrightarrow{\phi} & Spin(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Sp(q) \cdot Sp(1) & \subset & SO(n) \end{array} \tag{141}$$

Für gerades q ist $\phi(-1,-1) = 1$, d.h. die Einbettung $Sp(q) \cdot Sp(1) \subset SO(n)$ läßt sich zu einer Einbettung $Sp(q) \cdot Sp(1) \subset Spin(n)$ anheben.

Ist dagegen q ungerade, so ist $\phi(-1,-1) = -1$. Daher gilt für die Einbettung

$$\Phi = \phi \times pr_2 : Sp(q) \times Sp(1) \hookrightarrow Spin(n) \times Sp(1), \tag{142}$$

daß $\Phi(-1,-1) = (-1,-1)$. Daher induziert Φ eine Einbettung

$$\bar{\Phi} : Sp(q) \cdot Sp(1) \hookrightarrow Spin(n) \cdot Sp(1). \tag{143}$$

Damit ist der Beweis beendet. $\square$

Wir werden uns im zunächst auf den Fall konzentrieren, daß q ungerade ist. Im zweiten Kapitel haben wir gesehen, daß dann $R(Sp(q)Sp(1), Sp(q-1)Sp(1))$

die Erzeuger $(\Sigma^+ - \Sigma^-)\rho, (\Sigma^+ - \Sigma^-)\Lambda^{1,0}, (\Sigma^+ - \Sigma^-)\Lambda^{3,0}, \ldots, (\Sigma^+ - \Sigma^-)\Lambda^{q,0}$ hat. Wir wenden den allgemeinen Ganzzahligkeitssatz 3.5 auf die zugehörigen fundamentalen Operatoren an, wobei wir den ersten bereits im Kapitel über Spin^h-Mannigfaltigkeiten betrachtet haben. Das Tangentialbündel wird zum Modul τ assoziiert, wobei $\tau \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{1,0}\rho$ ist. Daher gilt

$$ch(\Lambda^{1,0}) = \frac{ch(\tau \otimes \mathbb{C})}{ch(\rho)} \tag{144}$$

und für die höheren Potenzen

$$ch(\Lambda^{k,0}) = ch(\Lambda^k(\Lambda^{1,0})) = \lambda^k ch(\Lambda^{1,0}) = \lambda^k \frac{ch(\tau \otimes \mathbb{C})}{ch(\rho)}. \tag{145}$$

Zur Bedeutung von λ^k siehe Definition 3.8. Satz 3.5 liefert nun

Satz 6.2. *Sei M eine kompakte fast-quaternionische Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 4q$ mit q ungerade. Sei E das kanonische $SO(3)$-Bündel mit erster Pontrjagin-Klasse $p_1(E) \in H^4(M;\mathbb{Z})$.*

Dann sind folgende rationale Zahlen tatsächlich ganz:

$$2\int_M \left\{cosh(\sqrt{p_1(E)}/2)\hat{A}(TM)\right\},$$

$$\int_M \left\{\lambda^k \left(\frac{ch(TM \otimes \mathbb{C})}{2cosh(\sqrt{p_1(E)}/2)}\right) \hat{A}(TM)\right\}, k = 1, 3, \ldots, q.$$

Ist allgemeiner $V \in R(Sp(q)Sp(1))$ und $\mathcal{P}$ das $Sp(q)Sp(1)$-Prinzipalbündel über M, dann sind folgende Ausdrücke ganze Zahlen:

$$2\int_M \left\{ch(\mathcal{P} \times_{Sp(q)Sp(1)} V)cosh(\sqrt{p_1(E)}/2)\hat{A}(TM)\right\},$$

$$\int_M \left\{ch(\mathcal{P} \times_{Sp(q)Sp(1)} V)\lambda^k \left(\frac{ch(TM \otimes \mathbb{C})}{2cosh(\sqrt{p_1(E)}/2)}\right) \hat{A}(TM)\right\}, k = 1, 3, \ldots, q.\square$$

Korollar 6.3. *Sei M eine kompakte fast-quaternionische Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 4q$ mit q ungerade. Sei E das kanonische $SO(3)$-Bündel, dessen erste Pontrjagin-Klasse $p_1(E) \in H^4(M;\mathbb{Z})$ eine Torsionsklasse sein möge.*

Dann ist $2\hat{A}(M)$ ganz, als auch die Zahlen

$$\int_M \left\{\lambda^k \left(\frac{1}{2}ch(TM \otimes \mathbb{C})\right) \hat{A}(TM)\right\}, k = 1, 2, \ldots, q.\square$$

Korollar 6.4. *Sei M eine kompakte fast-quaternionische Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 4q$ mit q ungerade. Die vierte Betti-Zahl möge verschwinden, $b_4(M;\mathbb{R}) = 0$.*

Dann ist $2\hat{A}(M)$ ganz, als auch die Zahlen

$$\int_M \left\{ \lambda^k \left(\frac{1}{2} ch(TM \otimes \mathbb{C}) \right) \hat{A}(TM) \right\}, k = 1, 2, \ldots, q. \square$$

Betrachten wir nun noch kurz den Fall, daß q gerade ist. Wie wir aus Kapitel 2 wissen, wird das Ideal $R(Sp(q)Sp(1), Sp(q-1)Sp(1))$ dann von $\Sigma^+ - \Sigma^-$ erzeugt. Wir haben also wie bei Spin-Mannigfaltigkeiten den Dirac-Operator als fundamentalen Operator. Allerdings haben wir mehr Möglichkeiten, mit Darstellungen zu twisten, z.B. mit den Moduln $\Lambda^{k,0} \in R(Sp(q)Sp(1))$, $k = 2, 4, \ldots, q$. Analog zu Satz 6.2 erhalten wir

Satz 6.5 *Sei M eine kompakte fast-quaternionische Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 4q$ mit q gerade. Sei E das kanonische $SO(3)$-Bündel mit erster Pontrjagin-Klasse $p_1(E) \in H^4(M; \mathbb{Z})$.*
Dann sind das $\hat{A}$-Geschlecht sowie folgende Ausdrücke ganze Zahlen:

$$\int_M \left\{ \lambda^k \left(\frac{ch(TM \otimes \mathbb{C})}{2cosh(\sqrt{p_1(E)}/2)} \right) \hat{A}(TM) \right\}, k = 2, 4, \ldots, q. \square$$

Selbstverständlich können wir auch in diesem Fall noch mit beliebigen Elementen aus $R(Sp(q)Sp(1))$ twisten.

Bemerkung 6.6. Für *quaternionische* Mannigfaltigkeiten wurden gewisse getwistete Dirac-Operatoren bereits betrachtet, da sie sich teilweise in elliptische Komplexe entwickeln lassen, ähnlich dem deRham-Komplex zum Euler-Operator und dem Dolbeault-Komplex zum Cauchy-Riemann-Operator, siehe [22], [4].

7. Immersionen

Aus Immersionen mit bestimmten Eigenschaften kann man Strukturgruppen für die betrachtete Mannigfaltigkeit herstellen, auf die wir unsere Konstruktionsmethode für elliptische Operatoren anwenden wollen. Wir betrachten dabei kompakte Mannigfaltigkeiten mit transitiver G^1-Struktur, die in Spin-Mannigfaltigkeiten immersiert werden können, so daß das Normalenbündel eine G^2-Struktur trägt. Daraus leiten wir die Ganzzahligkeit bestimmter topologischer Ausdrücke her.

Genauer seien $G^1 \subset SO(n)$, $n = 2m$, und $G^2 \subset SO(k)$ zusammenhängende Lie-Untergruppen, und G^1 soll transitiv auf $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ operieren. Zu einem $x_0 \in S^{n-1}$ bezeichne $H^1 \subset G^1$ die Isotropieuntergruppe. Unter den zweifachen Überlagerungsabbildungen $\pi_1 : Spin(n) \to SO(n)$ und $\pi_2 : Spin(k) \to SO(k)$ betrachten wir die Urbilder dieser Gruppen und erhalten $\hat{G}^1 = \pi_1^{-1}(G^1), \hat{H}^1 = \pi_1^{-1}(H^1)$ sowie $\hat{G}^2 = \pi_2^{-1}(G^2)$. Die beiden zentralen Elemente $\pm 1 \in Spin(n$ bzw. $k)$ sind auch in $\hat{G}^1$, $\hat{H}^1$ und $\hat{G}^2$ enthalten.

Das zentrale Ergebnis dieses Abschnitts lautet

Satz 7.1. *Sei M eine n-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit mit G^1-Struktur, $n = 2m$ gerade. M sei immersiert in eine $(n + k)$-dimensionale Spin-Mannigfaltigkeit, z.B. $\mathbb{R}^{n+k}$, so daß das Normalenbündel eine G^2-Struktur hat. Seien $\Phi_{TM} : M \to BG^1$ und $\Phi_N : M \to BG^2$ die klassifizierenden Abbildungen für Tangential- und Normalenbündel.*

Sind $\sigma \in R(\hat{G}^1, \hat{H}^1)$ und $V \in R(\hat{G}^2)$ so, daß $(-1, -1)$ trivial auf $\sigma \cdot V$ operiert, dann ist

$$\int_M \left\{ \Phi_N^* \left((\pi_2^*)^{-1} ch(V) \right) \cdot \Phi_{TM}^* \left(\frac{(\pi_1^*)^{-1} ch(\sigma)}{e|BG^1} \right) \cdot \hat{\mathcal{A}}(TM)^2 \right\}$$

eine ganze Zahl.

Beweis. M hat eine G^1-Struktur und damit eine $G^1 \times G^2$-Struktur. Wegen der Immersierbarkeit in eine Spin-Mannigfaltigkeit kann diese $G^1 \times G^2$-Struktur zu einer G-Struktur angehoben werden, wobei G das Urbild von $G^1 \times G^2 \subset SO(n+k)$ in $Spin(n + k)$ ist.

Es gilt $G = \frac{G^1 \times G^2}{\mathbb{Z}_2}$, wobei $\mathbb{Z}_2 = \{(1, 1), (-1, -1)\}$. Da $\mathbb{Z}_2$ nach Voraussetzung trivial auf $\sigma \cdot V$ operiert, kann $\sigma \cdot V$ als Element von $R(G)$ angesehen werden. Weil $\sigma \in R(\hat{G}^1, \hat{H}^1)$ ist, liegt $\sigma \cdot V$ sogar in $R(G, H)$, wobei $H = \frac{H^1 \times G^2}{\mathbb{Z}_2}$ die Isotropieuntergruppe von G ist.

Satz 3.5 liefert nun die Behauptung. □

In den folgenden beiden Tabellen listen wir einige Beispiele auf. Wir können dabei G^1 und G^2 einzeln betrachten und sie anschließend beliebig kombinieren. Die auftretenden σ und V sind stets so, daß $-1 \in \hat{G}^1$ bzw. $\hat{G}^2$ durch Multiplikation mit -1 wirkt, so daß $\mathbb{Z}_2$ trivial auf $\sigma \cdot V$ operiert.

G^1	σ	$\Phi_{TM}^*\left(\frac{(\pi_1^*)^{-1}ch(\sigma)}{e\lvert BG^1}\cdot\hat{\mathcal{A}}^2\right)$
$SO(n)$	$\Sigma^+ - \Sigma^-$	$\hat{\mathcal{A}}(TM)$
$U(m)$	$(1-\Lambda^{1,0}_{U(m)} \pm \cdots)\cdot(\Lambda^{m,0}_{U(m)})^{1/2}$	$(-1)^m e^{c_1(TM)/2}\cdot\mathcal{TD}(TM)$
$Sp(q)Sp(1)$, q gerade	$(\Sigma^+ - \Sigma^-)\cdot\rho$	$2cosh(\sqrt{p_1(E)}/2)\cdot\hat{\mathcal{A}}(TM)$
	$(\Sigma^+ - \Sigma^-)\cdot\Lambda^{k,0}$, k ungerade	$\lambda^k\left(\frac{ch(TM\otimes\mathbb{C})}{2cosh(\sqrt{p_1(E)}/2)}\right)\hat{\mathcal{A}}(TM)$
$Sp(q)Sp(1)$, q ungerade	$\Sigma^+ - \Sigma^-$	$\hat{\mathcal{A}}(TM)$
	$(\Sigma^+ - \Sigma^-)\cdot\Lambda^{k,0}$, k gerade	$\lambda^k\left(\frac{ch(TM\otimes\mathbb{C})}{2cosh(\sqrt{p_1(E)}/2)}\right)\hat{\mathcal{A}}(TM)$
$Sp(q)U(1)$, q gerade	$(\Sigma^+ - \Sigma^-)\cdot z$	$e^{c_1(L)/2}\cdot\hat{\mathcal{A}}(TM)$
$Sp(q)U(1)$, q ungerade	$\Sigma^+ - \Sigma^-$	$\hat{\mathcal{A}}(TM)$

Hierzu einige Erläuterungen: Die Bezeichnungen sind weitgehend die aus den vorangegangenen Kapiteln, d.h. L bezeichnet das kanonische $U(1)$-Bündel, E das kanonische $SO(3)$-Bündel, c_1 die erste Chern-Klasse, p_1 die erste Pontrjagin-Klasse und $\mathcal{TD}$ die totale *Todd-Klasse*. Die Gruppe $\hat{U}(m)$ ist eine zweifache Überlagerungsgruppe von $U(m)$; sie besitzt einen Modul, dessen Quadrat $\Lambda^{m,0}_{U(m)}$ ist. Wir bezeichnen ihn mit $(\Lambda^{m,0}_{U(m)})^{1/2}$.

Nun zur Strukturgruppe G^2 des Normalenbündels. Hier könnte man auch Gruppen nehmen, die nicht transitiv auf der Einheitssphäre operieren, aber wir wollen uns hier auf die beiden Fälle $G^2 = SO(k)$ und $G^2 = U(l)$ beschränken.

G^2	V	$\Phi_N^*\left((\pi_2^*)^{-1}ch(V)\right)$
$SO(k)$, $k=2l$ gerade	$\Sigma^+ - \Sigma^-$	$e(N)\cdot\hat{\mathcal{A}}(N)^{-1}$
	$\Sigma^+ + \Sigma^-$	$2^l\cdot\mathcal{M}(N)$
$SO(k)$, $k=2l+1$ ungerade	Σ	$2^l\cdot\mathcal{M}(N)$
$U(l)$	$(\Lambda^{l,0}_{U(l)})^{1/2}$	$e^{c_1(N)/2}$

Dabei ist $\mathcal{M}(N)$ die multiplikative Klasse zur Potenzreihe $cosh(x/2)$, d.h. schreiben wir die Pontrjagin-Klasse $p(N)$ formal als $p(N) = \prod_{j=1}^{l}(1+x_j^2)$, dann ist

$$\mathcal{M}(N) = \prod_{j=1}^{l} cosh(x_j/2). \tag{146}$$

Kombinieren wir $G^1 = SO(n)$ mit $G^2 = SO(k)$, so erhalten wir

Satz 7.2. (K.H. Mayer [17, Satz 3.2])
Sei M eine n-dimensionale kompakte orientierte Mannigfaltigkeit, $n = 2m$ gerade, die mit Normalenbündel N in eine $(n+k)$-dimensionale Spin-Mannigfaltigkeit immersiert werden kann.

Ist $k = 2l$ gerade, dann sind folgende Ausdrücke ganz:

$$\int_M e(N)\hat{\mathcal{A}}(N)^{-1}\hat{\mathcal{A}}(TM)$$

und

$$2^l \int_M \mathcal{M}(N)\hat{\mathcal{A}}(TM).$$

Ist $k = 2l+1$ ungerade, dann ist

$$2^l \int_M \mathcal{M}(N)\hat{\mathcal{A}}(TM)$$

eine ganze Zahl. □

Selbstverständlich kann man noch mit Bündeln twisten oder untersuchen, unter welchen Bedingungen an n und k die betrachteten elliptischen Operatoren quaternionisch sind, um auf diese Weise das Ganzzahligkeitsresultat um einen Faktor 2 zu verbessern, vgl. die Tabellen am Ende des zweiten Kapitels. Anwendungen auf Immersionen projektiver Räume in den euklidischen Raum findet man in [17].

Zur Illustration kombinieren wir noch $G^1 = Sp(q)Sp(1)$, q gerade, mit $G^2 = U(l)$. Dann erhalten wir

Satz 7.3. *Sei M eine $4q$-dimensionale kompakte fast-quaternionische Mannigfaltigkeit, q gerade, die in eine $(4q+2l)$-dimensionale Spin-Mannigfaltigkeit so immersiert werden kann, daß das Normalenbündel N eine komplexe Struktur trägt. Mit E bezeichnen wir das kanonische $SO(3)$-Bündel von M.*

Dann sind folgende Ausdrücke ganz:

$$2\int_M e^{c_1(N)/2} cosh(\sqrt{p_1(E)}/2)\hat{\mathcal{A}}(TM),$$

$$\int_M e^{c_1(N)/2}\lambda^k\left(\frac{ch(TM\otimes\mathbb{C})}{2cosh(\sqrt{p_1(E)}/2)}\right)\hat{\mathcal{A}}(TM), k \text{ ungerade.}\square$$

Bemerkung 7.4. Man kann auch Immersionen in andere Mannigfaltigkeiten mit dieser Methode behandeln, z.B. Immersionen in Spin^c-Mannigfaltigkeiten. Dann hat man entsprechend Moduln der Urbilder von G^1 und G^2 in $Spin^c(n$ bzw. $k)$ zu betrachten und erhält etwa im Fall $G^1 = SO(n)$ und $G^2 = SO(k)$ K.H. Mayers anderen Ganzzahligkeitssatz [17, Satz 3.1]. Die dabei auftretenden Strukturgruppen sind die Gruppen $G(n,k,2)$ aus dem zweiten Kapitel.

References

[1] M. F. Atiyah, F. Hirzebruch, *Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds*, Bull. AMS **65** (1959), *276-281*

[2] M. F. Atiyah, I. M. Singer, *The index of elliptic operators III*, Ann. of Math. **87** (1968), *546-604*

[3] C. Bär, *Lower eigenvalue estimates for Dirac operators*, Math. Ann. **293** (1992), *39-46*

[4] R. J. Baston, *Quaternionic complexes*, J. of Geom. and Phys. **8** (1992), *29-52*

[5] A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1987

[6] E. Bonan, *Sur les G-structures de type quaternionien*, Cahiers Top. et Géom. Diff. **9** (1967), *389-463*

[7] A. Borel, *Some remarks about Lie groups transitive on spheres and tori*, Bull. AMS **55** (1949), *580-587*

[8] A. Borel, *Le plan projectif des octaves et les sphères comme espaces homogènes*, C. R. Acad. Sc. Paris **230** (1950), *1378-1380*

[9] A. Borel, *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Ann. of Math. **57** (1953), *115-207*

[10] T. Bröcker, T. tom Dieck, *Representations of compact Lie groups*, Springer-Verlag, New York 1985

[11] D. S. Freed, K. K. Uhlenbeck, *Instantons and four-manifolds*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2. Aufl. 1991

[12] O. Hijazi, *A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors*, Commun. Math. Phys. **104** (1986), *151-162*

[13] N. Hitchin, *Harmonic Spinors*, Adv. Math. **14** (1974), *1-55*

[14] D. Husemoller, *Fibre bundles*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1966

[15] H. B. Lawson, M.-L. Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton University Press, Princeton 1989

[16] A. Lichnerowicz, *Spineurs harmoniques*, C. R. Acad. Sci. Paris **257** (1963), *7-9*

[17] K. H. Mayer, *Elliptische Differentialoperatoren und Ganzzahligkeitssätze für charakteristische Zahlen*, Topology **4** (1965), *295-313*

[18] J. W. Milnor, J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton University Press, Princeton 1974

[19] D. Montgomery, H. Samelson, *Transformation groups of spheres*, Ann. of Math. **44** (1943), *454-470*

[20] S. M. Salamon, *Quaternionic Kähler manifolds*, Invent. Math. **67** (1982), *143-171*

[21] S. M. Salamon, *Differential geometry of quaternionic manifolds*, Ann. Sc. Éc. Norm. Sup. **19** (1986), *31-55*

[22] S. M. Salamon, *Index theory and quaternionic Kähler manifolds*, Preprint 1992

[23] J. Tits, *Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1967