

DAS SPEKTRUM VON DIRAC-OPERATOREN

Inauguraldissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
Bonn

vorgelegt von
Christian Bär

Angefertigt mit Genehmigung der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Bonn

Referent: Prof. Dr. W. Ballmann
Korreferent: Prof. Dr. H. Karcher

Bonn, September 1990

Il n'est pas bon que
tout le monde lise
les pages qui vont
suivre ... [Lau]

in den neuesten Zeiten gefallen ist, gehört meiner Meinung nach wohl
die Kunst, Bücher zu beurteilen, ohne sie gelesen zu haben.

Im Jahre des Herrn 1990

Matthias Weber

GELEITWORT

woraus bemerkenswerter Weise nichts hervorgeht [Mu]. Nichtsdestotrotz enthält es wichtige Hinweise darauf, was in diesem Werklein zu finden ist. Nimmt also ein irrender Leser dasselbe darum in die Hand, um sich darin auf seinem Sofa mit den größten Seelenselbstsezierereien und köstlichsten Weihrauchorgien, wie sie in der neueren Literatur gar zu üblich geworden, in Bekanntschaft zu setzen: so wart er solange, bis ers durchgelesen hat, um nach einem anderen zu greifen, worin dergleichen Sachen wirklich stehen [JP], wie etwa eines, aus dem *hier* die Rede ist.

Nachdem nun alles Vorteilhafte vom Werke herausgehoben sein dürfte, würde ich gern zum allgemeinen Nutzen auch noch eine Liste der kleineren und größeren Mängel anfügen, welche es aufweist, doch leider ist der Rand zu schmal, sie zu fassen.

Sollte jemand verwegen genug sein, gegen den gediegenen Wert des außerordentlichen Buches einige Zweifel erheben zu wollen, so mag er bedenken, daß er es mit einem Mathematiker zu tun hat, der Geist, Verstand besitzt, und scharfe Krallen [Hof].

Ich möchte frei nach Lichtenberg schließen: Wer zwei Paar Hosen hat, mache eine zu Geld und kaufe nicht dieses Buch, sondern vertrinke es. Denn unter die größten Entdeckungen, auf die der menschliche Verstand

VORWORT UND EINLEITUNG

In der vorliegenden Arbeit wird das Spektrum von Dirac-Operatoren auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten untersucht. Für den Laplace-Beltrami-Operator wurde das Spektrum intensiv studiert; die Zahl der Veröffentlichungen zu diesem Thema ist kaum überschaubar. Die Dirac-Operatoren dagegen kamen bei den Mathematikern erst vor relativ kurzer Zeit in Mode; über ihr Spektrum weiß man bislang recht wenig. Dabei bilden die verallgemeinerten Dirac-Operatoren eine recht große Klasse geometrischer Differentialoperatoren, die in gewisser Weise auch die Laplace-Operatoren auf Formen umfaßt.

Wir beginnen im ersten Kapitel mit einigen Definitionen, es wird kurz erklärt, was (verallgemeinerte) Dirac-Operatoren sind und es werden einige Standardformeln wie die Weitzenböck-Formel hergeleitet. Es wurde Wert darauf gelegt, auch den Fall berandeter Mannigfaltigkeiten einzuschließen. Für qualitative Aussagen über das Spektrum, etwa daß es auf kompakten Mannigfaltigkeiten diskret ist, oder die Regularität der Eigenschnitte, wird die allgemeine elliptische Theorie herangezogen.

Anschließend wird der klassische Dirac-Operator erläutert, einschließlich der algebraischen Konstruktionen, die zu den Spinoren führen. Hierbei geht es weniger um vollständige Beweise, sondern darum, die Konstruktionen möglichst explizit zu machen, damit wir später konkrete Beispiele behandeln können.

Im fünften Abschnitt wird eine Formel für den klassischen Dirac-Operator auf homogenen Räumen hergeleitet (Satz I.5.6), die eine bekannte Formel für symmetrische Räume verallgemeinert. Sie ermöglicht es, das klassische Dirac-Spektrum auf vielen homogenen Räumen mittels

Frobenius-Reziprozität zu bestimmen, oder vorsichtiger ausgedrückt, das Problem seiner Berechnung auf algebraische, darstellungstheoretische Probleme zurückzuführen.

Bei der Behandlung konkreter Beispiele hat man häufig das Problem, die verschiedenen Spin-Strukturen auf einer Mannigfaltigkeit konkretisieren zu müssen. Da die Spin-Struktur auf einer einfach-zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten eindeutig ist, untersuchen wir Riemannsche Überlagerungen, was es uns gestattet, die Spin-Strukturen auf den Quotienten durch gewisse Gruppenhomomorphismen zu charakterisieren.

Schließlich geben wir die wichtigsten Resultate über Killing-Spinoren an, die uns später auf Modellräumen konstanter Krümmung von Nutzen sind.

Das zweite Kapitel ist der Berechnung des Spektrums des *klassischen* Dirac-Operators auf verschiedenen konkreten Mannigfaltigkeiten gewidmet. Wir beginnen ganz elementar mit den flachen Tori, deren D^2 -Spektrum von Friedrich bereits 1984 in [Fr3] bestimmt worden ist.

Als zweites behandeln wir die Heisenberg-Mannigfaltigkeiten. Hier ist der wesentliche Punkt der, die rechtsreguläre Darstellung der Heisenberg-Gruppe auf den L^2 -Spinorfeldern in ihre irreduzible Bestandteile zu zerlegen. Dabei wird keine Kirillov-Theorie vorausgesetzt, sondern lediglich elementare Fourier-Analyse verwendet. Wir reduzieren die Berechnung des D -Spektrums auf die Berechnung der Eigenwerte gewisser Matrizen, so daß zumindest in niedrigen Dimensionen das D -Spektrum vollständig bestimmt werden kann. Aber auch im allgemeinen Fall genügt diese Charakterisierung, die wesentlichen qualitativen Eigenschaften des Dirac-Spektrums aufzudecken. Wir sehen, daß es in Dimension ≥ 5 stets D -isospektrale, nicht homotopieäquivalente Heisenberg-Mannigfaltigkeiten gibt, und daß wir den Raum der harmonischen Spinorfelder durch ge-

eignete Wahl der linksinvarianten Metrik beliebig groß machen können.

Das Dirac-Spektrum der runden Sphären wurde von S. Sulanke bereits in den siebziger Jahren in [Sul1] mittels Frobenius-Reziprozität bestimmt. Dies erfordert umfangreiche darstellungstheoretische Berechnungen. Wir verwenden hier eine ganz andere Methode. Da uns heute die Killing-Spinoren zur Verfügung stehen, verwenden wir sie, um das Spinorbündel der Sphäre zu trivialisieren. In dieser Trivialisierung können wir die Dirac-Eigenwerte leicht ausrechnen.

Alle Eigenwerte von Quotienten der Sphären sind auch Eigenwerte der Sphären selbst, lediglich ihre Multiplizitäten sind i.a. niedriger. Wir verschlüsseln die Information über die Multiplizitäten in zwei Poincaré-Reihen und rechnen diese aus. Damit ist auch das Spektrum der Raumformen positiver Krümmung bestimmt. Für die Linsenräume geben wir noch explizitere Formeln für die Poincaré-Reihen an.

Mittels Frobenius-Reziprozität bestimmen wir das Spektrum der dreidimensionalen Berger-Sphären und das seiner homogenen Quotienten. Für die Sphären war das Spektrum bereits bekannt, siehe [Hit]. Hier bietet es sich an, das Verhalten des Spektrums beim Kollaps gegen die 2-Sphäre zu studieren. Es stellt sich heraus, daß die dreidimensionalen Berger-Sphären zwei Sorten von Eigenwerten besitzen; „gute“, die gegen die Eigenwerte der 2-Sphäre konvergieren, und „schlechte“, die gegen $\pm\infty$ streben. Der dreidimensionale reell projektive Raum besitzt zwei Spin-Strukturen. Für eine zeigt das Dirac-Spektrum des $\mathbb{RP}^3$ mit Berger-Metrik dasselbe Verhalten; es gibt gute und schlechte Eigenwerte. Für die andere Spin-Struktur dagegen besitzt $\mathbb{RP}^3$ nur schlechte Eigenwerte. Für das Verhalten unter Kollaps spielt die Wahl der Spin-Struktur somit eine entscheidende Rolle, eine Beobachtung, die wir auch bei den Tori und den Heisenberg-Mannigfaltigkeiten machen konnten. Es wäre interessant,

diesen Sachverhalt besser zu verstehen.

Im dritten Kapitel kehren wir zu den verallgemeinerten Dirac-Operatoren zurück und befassen uns mit Eigenwertabschätzungen. Wir beginnen mit den unteren Schranken und geben die bekannten Resultate von Friedrich, Kirchberg und Hijazi an.

Wir modifizieren den Clifford-Zusammenhang in geeigneter Weise und betrachten einen daraus entstehenden Differentialoperator in „Divergenzform“. Dies liefert eine noch etwas technische untere Eigenwertabschätzung (Satz I.1.9), aus der wir in Spezialfällen geometrische Schranken gewinnen können. Wir zeigen, daß alle Eigenwerte λ des klassischen Dirac-Operators auf einer Fläche vom Geschlecht 0 die Ungleichung $\lambda^2 \geq 4\pi/\text{area}(M)$ erfüllen, was für die runde 2-Sphäre scharf ist. Da Flächen von höherem Geschlecht harmonische Spinorfelder zulassen, ist dieses Ergebnis für Flächen optimal.

Für höhere Dimension studieren wir folgende Situation. Auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit sei uns ein Dirac-Operator gegeben, dessen Krümmungsendomorphismus ≥ 0 ist, auf einem Teilgebiet größer oder gleich einer positiven Schranke. Nach der Weitzenböck-Formel kann 0 kein Eigenwert sein; wir leiten eine geometrische untere Schranke her. Schließlich gewinnen wir mit einer anderen Methode eine untere Schranke des ersten Eigenwertes des Quadrates eines Dirac-Operators auf einer berandeten Mannigfaltigkeit mit Dirichlet-Randbedingungen.

Vafa und Witten haben in [Va-Wil] mit topologischen Methoden eine obere Eigenwertabschätzung bewiesen, die später von Baum in verschiedenen Situationen konkretisiert wurde. Wir zitieren diese Ergebnisse. Unsere Methode obere Schranken zu gewinnen ist eine völlig andere. Zunächst schätzen wir die Eigenwerte des Quadrates eines Dirac-Operators auf sternförmigen berandeten Mannigfaltigkeiten mittels des

Minimax-Prinzips ab. Dann wenden wir diese Resultate auf geodätische Bälle an und erhalten so wegen der Gebietsmonotonie Ergebnisse auch für den geschlossenen Fall. Für den klassischen Dirac-Operator erhalten wir in Satz III.2.9 erstmals obere Schranken, die für die ersten Eigenwerte auf allen runden Sphären scharf sind.

Der letzte Abschnitt ist wieder allein dem klassischen Dirac-Operator gewidmet. Wir leiten obere und untere Eigenwertschranken für geodätische Bälle in runden Sphären her. Ferner zeigen wir, daß der Grundton des Quadrates des Dirac-Operators auf dem hyperbolischen Raum 0 ist. Im Gegensatz zum Laplace-Beltrami-Grundton steht der Dirac-Grundton daher wieder im Einklang mit dem heuristischen Prinzip, daß größere Räume kleinere Eigenwerte haben.

Vielen Mathematikern bin ich für zahlreiche nützliche Diskussionen und Hinweise zu Dank verpflichtet, es seien nur U. Abresch, H. Baum, J. P. Bourguignon, O. Hijazi, M. Min-Oo und H. B. Rademacher genannt. Mein besonderer Dank gilt W. Ballmann für unzählige Tips und sein andauerndes Interesse an meiner Arbeit.

Bonn, im September 1990

Christian Bär

INHALT

I. DER DIRAC-OPERATOR

1. Definitionen.....	1
2. Weitzenböck-Formel und Verwandte.....	3
3. Das Spektrum von Dirac-Operatoren.....	8
4. Der klassische Dirac-Operator.....	12
5. Homogene Räume.....	18
6. Riemannsche Überlagerungen.....	27
7. Killing-Spinoren.....	31

II. BEISPIELE

1. Flache Tori.....	32
2. Heisenberg-Mannigfaltigkeiten.....	35
3. Runde Sphären.....	58
4. Quotienten von Sphären.....	62
5. Linsenräume.....	66
6. Dreidimensionale Berger-Sphären.....	72
7. Dreidimensionale Berger-Linsenräume.....	80

III. EIGENWERTABSCHÄTZUNGEN

1. Untere Schranken.....	86
2. Obere Schranken.....	102
3. Modellräume konstanter Krümmung.....	113

LITERATUR.....	120
----------------	-----

I. DER DIRAC-OPERATOR

1. DEFINITIONEN

Für einen endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum V bezeichne $\text{Cl}(V)$ die zugehörige *Clifford-Algebra*. Die Elemente von V erzeugen $\text{Cl}(V)$ als Algebra und genügen den Relationen $v \cdot w + w \cdot v = -2\langle v, w \rangle$. Die Vektorraumdimension von $\text{Cl}(V)$ ist 2^n , wenn $n = \dim(V)$. Es ist $\text{Cl}(V)$ als Vektorraum *kanonisch* isomorph zur äußeren Algebra $\wedge^* V$ vermöge des Isomorphismus $\wedge^* V \rightarrow \text{Cl}(V)$, $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \mapsto (1/k!) \sum \text{sgn}(\sigma) \cdot v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(k)}$, wobei sich die Summe über alle Permutationen σ von $\{1, \dots, k\}$ erstreckt.

Auf einer beliebigen Riemannschen Mannigfaltigkeit M , vollständig oder nicht, mit Rand oder ohne, können wir in jedem Punkt $p \in M$ die Clifford-Algebra $\text{Cl}(T_p M)$ sowie ihre Komplexifizierung $\text{Cl}(T_p M) \otimes \mathbb{C}$ bilden und erhalten so ein reelles bzw. komplexes Algebrenbündel $\text{Cl}(M)$ bzw. $\text{Cl}(M) \otimes \mathbb{C}$, das als Vektorbündel isomorph zu $\wedge^* TM \cong \wedge^* T^*M$ bzw. zu $\wedge^* TM \otimes \mathbb{C} \cong \wedge^* T^*M \otimes \mathbb{C}$ ist. Ein Vektorbündel V über M heißt *Clifford-Bündel*, falls gilt

(i) Es trägt V ein Hermitesches Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und einen verträglichen Zusammenhang ∇^{Cl} .

(ii) Es operiert $\text{Cl}(T_p M)$ auf V_p (differenzierbar in p).

(iii) Für jeden Vektor $X \in T_p M \subset \text{Cl}(T_p M)$ und alle $v, w \in V_p$ gilt:

$$\langle X \cdot v, w \rangle + \langle v, X \cdot w \rangle = 0.$$

(iv) Es ist ∇^{Cl} verträglich mit dem Levi-Civita-Zusammenhang ∇ , d.h.

$$\nabla_X^{\text{Cl}} (Y \cdot v) = (\nabla_X Y) \cdot v + Y \cdot (\nabla_X^{\text{Cl}} v).$$

Auf jedem Clifford-Bündel lebt ein *Dirac-Operator* D , der als Ver-

kettung der Abbildungen

$$C^\infty(M, V) \rightarrow C^\infty(M, T^*M \otimes V) \rightarrow C^\infty(M, TM \otimes V) \rightarrow C^\infty(M, V)$$

erklärt ist, wobei der erste Pfeil die Bildung des kovarianten Differentials bedeutet, der zweite durch den „musikalischen“ Isomorphismus zwischen TM und T^*M induziert wird und der dritte durch die Operation von $TM \subset \text{Cl}(M)$ auf V .

Ist $E_1, \dots, E_n$ ein lokaler orthonormaler Rahmen von M , so schreibt sich D als $D = \sum E_i \cdot \nabla_i^{\text{Cl}}$.

Beispiele. 1) Es operiert $\text{Cl}(M)$ auf sich selbst und damit vermöge des obigen Isomorphismus auf $\wedge^* T^*M \otimes \mathbb{C}$. Wir erhalten also einen Dirac-Operator, der auf den komplexwertigen Differentialformen operiert. Es gilt $D = d + d^*$, wobei d die äußere Ableitung von Differentialformen bezeichnet, und d^* den dazu formal adjungierten Differentialoperator. Wir sehen, daß D^2 der bekannte Laplace-Beltrami-Operator auf Formen ist.

2) In Abschnitt 4 werden wir dem klassischen Dirac-Operator begegnen, der auf Spinorfeldern operiert.

3) Sei D ein Dirac-Operator, der auf Schnitten in einem Clifford-Bündel V operiert, sei E ein weiteres Hermitesches Vektorbündel mit verträglichem Zusammenhang ∇^E . Wir bilden jetzt einen „getwisteten“ Dirac-Operator D^E wie folgt: Das Vektorbündel $V \otimes E$ erbt ein Hermitesches Skalarprodukt und einen verträglichen Zusammenhang $\nabla^{V \otimes E} = \nabla^{\text{Cl}} \otimes \text{id}_E + \text{id}_V \otimes \nabla^E$. Es operiert $\text{Cl}(M)$ auf $V \otimes E$ durch $X \cdot (v \otimes e) = (X \cdot v) \otimes e$. Auf diese Weise wird $V \otimes E$ zu einem Clifford-Bündel und trägt somit einen Dirac-Operator D^E . Lokal gilt: $D^E = D \otimes \text{id}_E + \sum E_i \otimes \nabla_i^E$.

Viele Details zu diesen formalen algebraischen Konstruktionen finden sich in ILa-Mil.

2. WEITZENBÖCK-FORMEL UND VERWANDTE

In diesem Abschnitt sei M stets eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Clifford-Bündel V und Dirac-Operator D . Es sei R^{Cl} der zu ∇^{Cl} gehörige Krümmungstensor auf V . Wir erklären den *Krümmungsendomorphismus* K mittels einer Orthonormalbasis $E_1, \dots, E_n$ von $T_p M$ durch $K = \sum_{i < j} E_i \cdot E_j \cdot R^{Cl}(E_i, E_j)$. Es sei $(\nabla^{Cl})^*$ der zu ∇^{Cl} formal adjungierte Differentialoperator. Dabei bezieht sich „formal adjungiert“ stets auf das L^2 -Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$, das definiert ist durch $(v, w) = \int_M \langle v, w \rangle$.

Ein lokaler orthonormaler Rahmen $E_1, \dots, E_n$ heißt *synchron um* $p \in M$, falls $\nabla E_i(p) = 0$ für alle i . Der duale Rahmen $E_1^*, \dots, E_n^*$ für T^*M ist dann automatisch ebenfalls synchron um p .

Das äußere Einheitsnormalenfeld längs des Randes ∂M bezeichnen wir mit ν , die 1-Form auf $TM|_{\partial M}$, die auf $T(\partial M)$ verschwindet und auf ν den Wert 1 annimmt, mit ν^* .

PROPOSITION 2.1. *Sei $E_1, \dots, E_n$ ein um p synchroner ON-Rahmen. Sei $\tilde{\nabla}$ ein beliebiger metrischer Zusammenhang auf V . Seien $v, v_i \in C^1(M, V)$, $\Psi \in C^1(M, T^*M \otimes V)$. Dann gilt in p :*

$$\tilde{\nabla}^* (\sum E_i^* \otimes v_i) = - \sum \tilde{\nabla}_i v_i,$$

$$\tilde{\nabla}^* \tilde{\nabla} v = - \sum \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_i v.$$

Haben die Träger von v und Ψ einen kompakten Durchschnitt, dann gilt:

$$(\tilde{\nabla} v, \Psi) - (v, \tilde{\nabla}^* \Psi) = \int_{\partial M} \langle \nu^* \otimes v, \Psi \rangle.$$

BEWEIS: Wir definieren einen Differentialoperator L durch die Formel $L(\sum E_i^* \otimes v_i)(p) = - \sum \tilde{\nabla}_i v_i(p)$. Eine einfache Rechnung zeigt, daß $L: C^\infty(M, T^*M \otimes V) \rightarrow C^\infty(M, V)$ ein wohldefinierter Differentialoperator

ist, d.h. nicht von der Wahl des synchronen Rahmens abhängt.

Wir wollen zeigen, daß $L = \tilde{\nabla}^*$. Sei dazu $v \in C^\infty(M, V)$ und $\Psi \in C^\infty(M, T^*M \otimes V)$. Sei X das eindeutige Vektorfeld, so daß für alle 1-Formen ω gilt: $\omega(X) = \langle \omega \otimes v, \Psi \rangle$.

Sei $E_1, \dots, E_n$ ein lokaler ON-Rahmen. Wir schreiben $\nabla = \tilde{\nabla}$.

Nun gilt $\partial_i(\omega(X)) = \langle \nabla_i \omega \otimes v, \Psi \rangle + \omega(\nabla_i X)$, andererseits

$$\partial_i \langle \omega \otimes v, \Psi \rangle = \langle \nabla_i \omega \otimes v + \omega \otimes \nabla_i v, \Psi \rangle + \langle \omega \otimes v, \nabla_i \Psi \rangle.$$

Somit ist $\omega(\nabla_i X) = \langle \omega \otimes \nabla_i v, \Psi \rangle + \langle \omega \otimes v, \nabla_i \Psi \rangle$.

Wir schreiben lokal $\Psi = \sum E_j^* \otimes \Psi_j$ und berechnen die Divergenz von X in $q \in M$, wenn $E_1, \dots, E_n$ synchron ist um q .

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum E_j^* (\nabla_j X) = \langle \sum E_j^* \otimes \nabla_j v, \Psi \rangle + \sum \langle E_j^* \otimes v, \nabla_j (E_j^* \otimes \Psi_j) \rangle = \\ &= \langle \nabla v, \Psi \rangle + \sum \langle E_j^* \otimes v, E_j^* \otimes \nabla_j \Psi_j \rangle = \\ &= \langle \nabla v, \Psi \rangle + \sum \langle v, \nabla_j \Psi_j \rangle = \langle \nabla v, \Psi \rangle - \langle v, L\Psi \rangle. \end{aligned}$$

Der Divergenzsatz liefert

$$(\nabla v, \Psi) - (v, L\Psi) = \int_M \operatorname{div} X = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle = \int_{\partial M} \langle \nu^* \otimes v, \Psi \rangle.$$

Falls v und Ψ Testschnitte sind, fällt das Randintegral weg und wir sehen, daß $L = \nabla^*$. Damit sind die erste und die dritte Formel gezeigt. Die zweite folgt unmittelbar. ■

PROPOSITION 2.2. (Weitzenböck-Formel)

$$D^2 = (\nabla^{Cl})^* \nabla^{Cl} + K$$

BEWEIS: Sei $p \in M$, $E_1, \dots, E_n$ synchron um p . Es gilt in p :

$$\begin{aligned} D^2 v &= \sum E_i \cdot \nabla_i^{Cl} (E_j \cdot \nabla_j^{Cl} v) = \sum E_i \cdot E_j \cdot \nabla_i^{Cl} \nabla_j^{Cl} v = \\ &= - \sum \nabla_i^{Cl} \nabla_j^{Cl} v + \sum_{i < j} E_i \cdot E_j \cdot R^{Cl}(E_i, E_j) v = (\nabla^{Cl})^* \nabla^{Cl} v + K v. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.3. Für $\Phi, \Psi \in C^1(M, V)$, deren Träger kompakten Durchschnitt haben, gilt:

$$(D\Phi, \Psi) - (\Phi, D\Psi) = \int_{\partial M} \langle \nu \cdot \Phi, \Psi \rangle.$$

Insbesondere ist D formal selbstadjungiert.

BEWEIS: Wir definieren das (C^1 -) Vektorfeld X durch

$$\langle X, Y \rangle = \langle Y \cdot \Phi, \Psi \rangle \quad \forall Y.$$

Die Divergenz ergibt sich zu $\operatorname{div} X = \langle D\Phi, \Psi \rangle - \langle \Phi, D\Psi \rangle$. Der Divergenzsatz liefert die Behauptung. ■

LEMMA 2.4. Für $\Phi, \Psi \in C^1(M, V)$ mit $\operatorname{supp}(\Phi) \cap \operatorname{supp}(\Psi) \cap \partial M$ kompakt gilt:

$$\int_{\partial M} (\langle \nu \cdot D\Phi, \Psi \rangle - \langle \Phi, \nu \cdot D\Psi \rangle) = \int_{\partial M} (\langle \Phi, \nabla_\nu^{Cl} \Psi \rangle - \langle \nabla_\nu^{Cl} \Phi, \Psi \rangle).$$

BEWEIS: Auf ∂M erklären wir ein C^1 -Vektorfeld X durch

$$\langle X, Y \rangle = \langle \Phi, \nu \cdot Y \cdot \Psi \rangle \quad \forall Y \in T\partial M.$$

Für die Divergenz von X erhalten wir

$$\operatorname{div} X = \langle \Phi, \nu \cdot D^{\partial M} \Psi \rangle - \langle \nu \cdot D^{\partial M} \Phi, \Psi \rangle,$$

wobei $D^{\partial M}$ der zum Clifford-Bündel $V|_{\partial M}$ auf ∂M gehörige Dirac-Operator ist. Der Divergenzsatz liefert nun

$$\int_{\partial M} (\langle \Phi, \nu \cdot D^{\partial M} \Psi \rangle - \langle \nu \cdot D^{\partial M} \Phi, \Psi \rangle) = 0.$$

Längs ∂M gilt $D = D^{\partial M} + \nu \cdot \nabla_\nu^{Cl}$. Hieraus folgt die Behauptung. ■

PROPOSITION 2.5. Für $\Phi, \Psi \in C^2(M, V)$ mit $\operatorname{supp}(\Phi) \cap \operatorname{supp}(\Psi)$ kompakt gilt

$$(D^2 \Phi, \Psi) - (\Phi, D^2 \Psi) = \int_{\partial M} (\langle \Phi, \nabla_\nu^{Cl} \Psi \rangle - \langle \nabla_\nu^{Cl} \Phi, \Psi \rangle).$$

BEWEIS: Die Behauptung folgt durch zweifache Anwendung von Proposition 2.3. unter Benutzung von Lemma 2.4. ■

Notationen. Für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ setzen wir

$$C_c^k(M, V) = \{ \Phi \in C^k(M, V) \mid \operatorname{supp}(\Phi) \subset\subset M \}$$

$$C_o^k(M, V) = \{ \Phi \in C^k(M, V) \mid \Phi|_{\partial M} = 0 \}$$

$$C_v^k(M, V) = \{ \Phi \in C^k(M, V) \mid \nabla_\nu^{Cl} \Phi = 0 \text{ auf } \partial M \}$$

Bemerkung. Proposition 2.5. besagt, daß D^2 sowohl auf $C_o^2(M, V)$ als auch auf $C_v^2(M, V)$ ein symmetrischer Operator ist.

LEMMA 2.6. Für $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ und $v \in C^1(M, V)$ gilt:

$$D(fv) = \operatorname{grad} f \cdot v + f \cdot Dv.$$

BEWEIS: Die Behauptung folgt direkt aus der Definition von D . ■

LEMMA 2.7. Für $f \in C^2(M, \mathbb{R})$ und $v \in C^1(M, V)$ gilt:

$$D(\operatorname{grad} f \cdot v) = -\operatorname{grad} f \cdot Dv - 2 \nabla_{\operatorname{grad} f}^{Cl} v + \Delta_o f \cdot v,$$

wobei $\Delta_o = -\operatorname{div} \cdot \operatorname{grad}$ der positive Laplace-Beltrami-Operator auf Funktionen ist.

BEWEIS: Sei $E_1, \dots, E_n$ ein lokaler ON-Rahmen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} D(\operatorname{grad} f \cdot v) &= \sum E_i \cdot \nabla_i^{Cl} (\operatorname{grad} f \cdot v) = \\ &= \sum \{ E_i \cdot \nabla_i \operatorname{grad} f \cdot v + E_i \cdot \operatorname{grad} f \cdot \nabla_i^{Cl} v \} = \\ &= \sum_i \{ \sum_j E_i \cdot \langle \nabla_i \operatorname{grad} f, E_j \rangle E_j \cdot v - \operatorname{grad} f \cdot E_i \cdot \nabla_i^{Cl} v - 2 \langle E_i, \operatorname{grad} f \rangle \nabla_i^{Cl} v \} \\ &= \sum_{ij} \operatorname{Hess} f(E_i, E_j) \cdot E_i \cdot E_j \cdot v - \operatorname{grad} f \cdot Dv - 2 \nabla_{\operatorname{grad} f}^{Cl} v. \end{aligned}$$

Da die Hessesche von f symmetrisch ist, heben sich die Nicht-Diagonal-Terme paarweise weg, und in der Doppelsumme bleiben nur die Diagonal-

Terme übrig. Weil $E_i \cdot E_i = -1$ ist, ergibt sich die Doppelsumme zu

$$- \operatorname{tr} \operatorname{Hess} f = \Delta_{\circ} f.$$

Für untere Eigenwertabschätzungen ist noch die folgende Verallgemeinerung der Weitzenböck-Formel von Bedeutung. Sei dazu $\mu \in \mathbb{C}$. Wir modifizieren den Clifford-Zusammenhang wie folgt:

$$\tilde{\nabla}_X \Psi = \nabla_X^{\text{Cl}} \Psi + \mu \cdot X \cdot \Psi.$$

$\tilde{\nabla}$ ist ein Zusammenhang auf dem Bündel V , der für reelles μ sogar metrisch ist. Es gilt

PROPOSITION 2.8. Für reelles μ gilt

$$(D - \mu)^2 = \tilde{\nabla}^* \tilde{\nabla} + K - (n-1)\mu^2.$$

BEWEIS: Einerseits gilt nach der Weitzenböck-Formel

$$\begin{aligned} (D - \mu)^2 &= D^2 - 2\mu D + \mu^2 = \\ &= (\nabla^{\text{Cl}})^* \nabla^{\text{Cl}} + K - 2\mu D + \mu^2. \end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich in $p \in M$ bzgl. eines um p synchronen Rahmens $E_1, \dots, E_n$:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}^* \tilde{\nabla} &= - \sum_i \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_i = \\ &= - \sum (\nabla_i^{\text{Cl}} + \mu E_i) (\nabla_i^{\text{Cl}} + \mu E_i) = \\ &= - \sum (\nabla_i^{\text{Cl}} \nabla_i^{\text{Cl}} + 2\mu E_i \cdot \nabla_i^{\text{Cl}} + \mu^2 E_i^2) = \\ &= (\nabla^{\text{Cl}})^* \nabla^{\text{Cl}} - 2\mu D + n\mu^2. \end{aligned}$$

Einsetzen der zweiten Gleichung in die erste ergibt die Behauptung. ■

3. DAS SPEKTRUM VON DIRAC-OPERATOREN

Das Symbol des Differentialoperators D können wir direkt aus Lemma 2.6. ablesen, nämlich $\sigma_D(\xi)v = \xi \cdot v$, wobei der Kovektor ξ vermöge der „musikalischen“ Identifikation mit dem zugehörigen Tangentialvektor durch Cliffordmultiplikation auf V operiert. Wir sehen insbesondere, daß für $\xi \neq 0$ die Abbildung $\sigma_D(\xi)$ ein Isomorphismus ist, somit ist D elliptisch.

Damit ist auch D^2 elliptisch mit skalarem Symbol, denn $\sigma_{D^2}(\xi)v = -|\xi|^2 v$.

Ist M eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit, d.h. kompakt und ohne Rand, dann ist jeder Dirac-Operator D über M wesentlich selbstadjungiert, d.h. der Abschluß von D mit Definitionsbereich $C^\infty(M, V)$ in $L^2(M, V)$ ist ein selbstadjungierter (unbeschränkter) Operator. Der Definitionsbereich des Abschlusses ist der Sobolew-Raum $W^{1,2}(M, V) = \{ v \in L^2(M, V) \mid \nabla^{\text{Cl}} v \in L^2(M, T^*M \otimes V) \}$. Aufgrund des Rellich'schen Einbettungssatzes besitzt der Abschluß von D eine kompakte Resolvente, daher ist das Spektrum reines Punktspektrum, d.h. diskret. Es besitzt $L^2(M, V)$ eine Orthonormalbasis aus Eigenschnitten, die Eigenräume sind alle endlich-dimensional, und alle Eigenschnitte sind glatt. Für Einzelheiten hierzu siehe [Roe, Kapitel 3].

Ist M vollständig und ohne Rand, dann ist D ebenfalls wesentlich selbstadjungiert, vgl. IGr-La, Theorem 1.17.1. Da uns ein Analogon zum Rellich'schen Einbettungssatz fehlt, tritt hier auch kontinuierliches Spektrum auf.

Ist M kompakt mit Rand ∂M , so betrachten wir das Dirichlet-Eigenwert-Problem $D^2 v = \lambda v$, $v|_{\partial M} = 0$. Hier gelten sinngemäß dieselben Aussagen wie im geschlossenen Fall, d.h. das Spektrum ist diskret,

$L^2(M, V)$ besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenschnitten, die der Randbedingung genügen, die Eigenräume sind endlich-dimensional, alle Eigenschnitte sind glatt. Dies folgt aus der Theorie der regulären elliptischen Randwertprobleme, siehe [Tay, 5. Kapitel], vergleiche auch [Gil, S. 70 ff].

Unter Dirichlet-Randbedingungen können wir gemäß Proposition 2.3. partiell integrieren: $(D^2 v, v) = (Dv, Dv) \geq 0$. Also ist das Spektrum von D^2 in diesem Fall (insbesondere auch im geschlossenen Fall) nichtnegativ.

Für kompaktes M mit Rand ∂M betrachten wir auch das Neumann-Eigenwert-Problem $D^2 v = \lambda v$, $\nabla_v^{Cl} v = 0$ auf ∂M . Die elliptische Theorie liefert wieder die entsprechenden Aussagen über das Spektrum (diskret) und die Eigenschnitte, allerdings können wir nicht wie unter Dirichlet-Randbedingungen partiell integrieren. Die Weitzenböck-Formel 2.2. und Proposition 2.1. gestatten uns immerhin die Umformung $(D^2 v, v) = ((\nabla^{Cl})^* \nabla^{Cl} v, v) + (Kv, v) = (\nabla^{Cl} v, \nabla^{Cl} v) + (Kv, v) \geq \kappa \cdot \|v\|^2$ für ein gewisses $\kappa \in \mathbb{R}$. Das Spektrum ist also wenigstens halbbeschränkt, es können allerdings endlich viele negative Eigenwerte auftreten, falls $\kappa < 0$.

Die letzte Umformung ist auch unter Dirichlet-Randbedingungen zulässig und liefert, falls $\kappa > 0$ ist, natürlich mehr Information als die ursprüngliche.

Für die Untersuchung des Spektrums des Dirichlet- oder Neumann-Eigenwert-Problems von D^2 ist das *Minimax-Prinzip* von großer Bedeutung. Dazu zählen wir die Eigenwerte auf $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots (\rightarrow +\infty)$, wobei jeder Eigenwert seiner Multiplizität entsprechend oft aufgeführt wird. Für $v \in W^{1,2}(M, V)$, $v \neq 0$, definieren wir den *Rayleigh-Quotienten*

$$R[v] = (\|\nabla^{Cl} v\|^2 + (Kv, v)) / \|v\|^2.$$

Unter Dirichlet-Randbedingungen gilt $\lambda_0 = \inf \{ R[v] \mid v \in C_0^2(M, V), v \neq 0 \}$. Da $v \mapsto R[v]$ stetig ist bzgl. der $W^{1,2}$ -Norm, und da $C_0^2(M, V)$

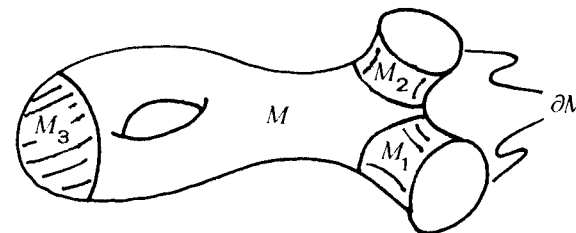
und $C_c^2(M, V)$ dieselbe $W^{1,2}$ -Vervollständigung $W_0^{1,2}(M, V)$ liefern, können wir das Infimum auch über die $v \neq 0$ aus $C_c^2(M, V)$ oder aus $W_0^{1,2}(M, V)$ erstrecken. Angenommen wird das Infimum genau von den Eigenschnitten zu λ_0 , somit von Elementen aus $C_0^\infty(M, V)$. Sind $v_0, \dots, v_{k-1}$ Eigenschnitte zu $\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}$, so gilt

$$\lambda_k = \inf \{ R[v] \mid v \in H, v \neq 0, (v, v_i) = 0 \text{ für } i = 0, \dots, k-1 \}.$$

Dabei ist $H = C_0^2(M, V)$ oder $W_0^{1,2}(M, V)$.

Für die Neumann-Randbedingung gelten die analogen Aussagen, wenn wir $H = C_v^2(M, V)$ nehmen. Da $C_v^2(M, V)$ dicht liegt in $W^{1,2}(M, V)$, können wir das Infimum auch über $H = W^{1,2}(M, V)$ erstrecken.

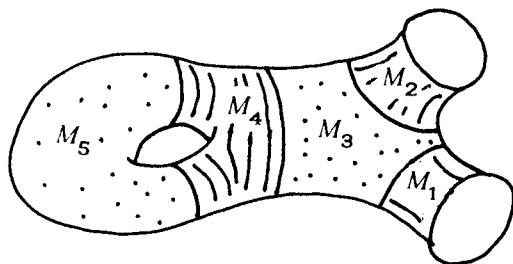
Gebietsmonotonie. Sei M kompakt, seien $M_1, \dots, M_j \subset M$ Untermannigfaltigkeiten der Kodimension 0 mit glatten Rändern und paarweise disjunktem Inneren. Falls ∂M_i eine Zusammenhangskomponente des Randes ∂M trifft, so soll diese ganz in ∂M_i enthalten sein.



a) Dirichlet-Daten: Sei $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots (\rightarrow +\infty)$ das Dirichlet-Spektrum von D^2 auf M . Die Dirichlet-Eigenwerte von D^2 auf den M_i ordnen wir in aufsteigender Folge $\nu_0 \leq \nu_1 \leq \dots$. Dann gilt:

$$\lambda_k \leq \nu_k.$$

b) Neumann-Daten: Wir setzen zusätzlich voraus, daß $M = M_1 \cup \dots \cup M_j$.



Diesmal sei $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$ das Neumann-Spektrum von D^2 auf M , $\nu_0 \leq \nu_1 \leq \dots$ sei die aufsteigende Anordnung aller Neumann-Eigenwerte von D^2 auf den M_i . Dann gilt:

$$\lambda_k \geq \nu_k.$$

Die Beweise sind dieselben wie für den Laplace-Beltrami-Operator, siehe [Cha, S. 18 f].

4. DER KLASSISCHE DIRAC-OPERATOR

Zunächst machen wir einige algebraische Vorbemerkungen; für die Details konsultiere man [La-Mil].

Die Cliffordalgebra $\text{Cl}(n) = \text{Cl}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}$ besitzt für gerades n genau eine nichttriviale irreduzible Darstellung. Wir können sie wie folgt realisieren: Für $n = 2k$ setzen wir $Z_j = (1/2) \cdot (E_{2j} - iE_{2j-1})$, $j = 1, \dots, k$. Dabei ist $E_1, \dots, E_n$ die Standard-ON-Basis des $\mathbb{R}^n$. Die $Z_j, \bar{Z}_j = (1/2) \cdot (E_{2j} + iE_{2j-1})$, $j = 1, \dots, k$, bilden eine Basis von $\mathbb{C}^n$. Daher sind die

$Z(i_1, \dots, i_r) = Z_{i_1} \cdot \dots \cdot Z_{i_r} \cdot \bar{Z}_1 \cdot \dots \cdot \bar{Z}_k$, $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k$, $0 \leq r \leq k$, linear unabhängig in $\text{Cl}(n)$. Der lineare Spann $\Delta_n^{\mathbb{C}}$ der $Z(i_1, \dots, i_r)$ bildet einen 2^k -dimensionalen Untervektorraum von $\text{Cl}(n)$.

Eine elementare Rechnung liefert:

$$\begin{aligned} i_j < l < i_{j+1} : \quad E_{2l} \cdot Z(i_1, \dots, i_r) &= (-1)^j \cdot Z(i_1, \dots, l, \dots, i_r) \\ E_{2l-1} \cdot Z(i_1, \dots, i_r) &= i \cdot (-1)^j \cdot Z(i_1, \dots, l, \dots, i_r) \\ l = i_j : \quad E_{2l} \cdot Z(i_1, \dots, i_r) &= (-1)^j \cdot Z(i_1, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_r) \\ E_{2l-1} \cdot Z(i_1, \dots, i_r) &= i \cdot (-1)^{j+1} \cdot Z(i_1, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_r). \end{aligned}$$

Dabei bedeutet der Hut $\hat{}$, daß der so gekennzeichnete Index weggelassen wird.

Insbesondere sehen wir, daß $\Delta_n^{\mathbb{C}}$ ein Linksideal in $\text{Cl}(n)$ ist, d.h. $\text{Cl}(n)$ operiert durch Cliffordmultiplikation auf $\Delta_n^{\mathbb{C}}$. Es ist $\Delta_n^{\mathbb{C}}$ genau die oben erwähnte irreduzible Darstellung von $\text{Cl}(n)$.

Beispiel: $n = 2$.

Es wird $\Delta_2^{\mathbb{C}}$ durch $Z()$ und $Z(1)$ aufgespannt. Es gilt

$$\begin{aligned} E_1 \cdot Z() &= i \cdot Z(1) \\ E_1 \cdot Z(1) &= i \cdot Z(). \end{aligned}$$

Somit entspricht E_1 der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

$$E_2 \cdot Z() = Z(1)$$

$$E_2 \cdot Z(1) = -Z().$$

Es liefert E_2 mithin die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Um ungerades $n = 2k - 1$ zu behandeln, setzen wir $n' = 2k$ und zerlegen $\mathbb{C}l(n')$ in gerade und ungerade Anteile $\mathbb{C}l(n') = \mathbb{C}l(n')^o \oplus \mathbb{C}l(n')^1$ und entsprechend $\Delta_n^{\mathbb{C}} = \Delta_n^o \oplus \Delta_n^1$. Es läßt $\mathbb{C}l(n')^o$ Δ_n^o und Δ_n^1 invariant.

Die Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}l(n')$, $E_j \rightarrow E_j \cdot E_n$, induziert einen Algebrenisomorphismus $\mathbb{C}l(n) \rightarrow \mathbb{C}l(n')^o$. Damit haben wir zwei Darstellungen von $\mathbb{C}l(n)$ gefunden. Da die „Volumenform“ $E_1 \cdot \dots \cdot E_n$ einmal wie +1 und einmal und einmal wie -1 operiert, sind die beiden Darstellungen inäquivalent. Ferner sind sie irreduzibel und sind auch die beiden einzigen nichttrivialen irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{C}l(n)$.

Beispiel. Sei $n = 3$, $n' = 4$.

Es wird Δ_4^o aufgespannt durch $Z()$ und $Z(1,2)$. Es gilt $E_1 \cdot E_4 \cdot Z() = E_1 \cdot Z(2) = i \cdot Z(1,2)$, sowie $E_1 \cdot E_4 \cdot Z(1,2) = E_1 \cdot Z(1) = i \cdot Z()$. Also operiert $E_1 \in \mathbb{C}l(3)$ wie $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Ferner ist $E_2 \cdot E_4 \cdot Z() = E_2 \cdot Z(2) = Z(1,2)$, $E_2 \cdot E_4 \cdot Z(1,2) = E_2 \cdot Z(1) = -Z()$, $E_3 \cdot E_4 \cdot Z() = E_3 \cdot Z(2) = i \cdot Z(1)$, $E_3 \cdot E_4 \cdot Z(1,2) = E_3 \cdot Z(1) = -i \cdot Z(1,2)$. Also wirken $E_2, E_3 \in \mathbb{C}l(3)$ wie $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

Die „Volumenform“ $E_1 \cdot E_2 \cdot E_3$ operiert durch Multiplikation mit -1 auf Δ_4^o .

Es wird Δ_4^1 durch $Z(1)$ und $Z(2)$ erzeugt. Es gilt $E_1 \cdot E_4 \cdot Z(1) = -E_1 \cdot Z(1,2) = -i \cdot Z(2)$, $E_1 \cdot E_4 \cdot Z(2) = -E_1 \cdot Z(1) = -i \cdot Z(1)$. $E_1 \in \mathbb{C}l(3)$ operiert somit auf Δ_4^1 wie $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$. E_2 und E_3 wirken wie $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

Hier operiert die „Volumenform“ also wie +1.

Sei nun wieder $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Die *Transposition* $*$ ist der eindeutige Antiautomorphismus von $\mathbb{C}l(n)$, der die Identität auf $\mathbb{R}^n$ fortsetzt, d.h. $(v_1 \cdot \dots \cdot v_j)^* = v_j \cdot \dots \cdot v_1$ für $v_i \in \mathbb{R}^n$. Die *Spin-Gruppe* ist nun gegeben durch $\text{Spin}(n) = \{ x \in \mathbb{C}l(n)^o \mid x \cdot x^* = 1, \quad x \cdot v \cdot x^* \in \mathbb{R}^n \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^n \}$. Es ist $\text{Spin}(n)$ so definiert, daß $\text{Spin}(n)$ auf dem $\mathbb{R}^n$ operiert. Wir setzen $\theta: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Gl}(n)$, $\theta(x) \cdot v = x \cdot v \cdot x^*$. Das Bild von θ ist genau $\text{SO}(n)$, der Kern ist $\{1, -1\}$, $\theta: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ ist zweifache Überlagerung, für $n \geq 3$ ist $\text{Spin}(n)$ einfach zusammenhängend.

Die oben betrachteten irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{C}l(n)$ können wir auf $\text{Spin}(n)$ einschränken und erhalten so Darstellungen der Lie-Gruppen $\text{Spin}(n)$. Für ungerades n sind die beiden so gewonnenen Darstellungen von $\text{Spin}(n)$ äquivalent, so daß wir für jedes n bis auf Äquivalenz nur eine Darstellung von $\text{Spin}(n)$ erhalten, die sogenannte *Spin-Darstellung*. Wir bezeichnen den Darstellungsraum mit Σ_n und schreiben $\rho: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Gl}(\Sigma_n)$. Für gerades n ist $\Sigma_n = \Delta_n^{\mathbb{C}}$, für ungerades n ist ganz nach Wunsch $\Sigma_n = \Delta_{n+1}^o$ oder $\Sigma_n = \Delta_{n+1}^1$. Es gilt $\dim(\Sigma_n) = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Da $\text{Spin}(n)$ kompakt ist, können wir auf Σ_n ein $\text{Spin}(n)$ -invariantes Hermitesches Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wählen, was wir hiermit ein für allemal tun, also $\rho: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{U}(\Sigma_n)$. Wir können das Skalarprodukt z.B. so wählen, daß die $Z(i_1, \dots, i_r)$ eine Orthonormalbasis bilden.

Man beachte noch, daß für gerades n $\text{Spin}(n)$ die Zerlegung $\Sigma_n = \Delta_n^o \oplus \Delta_n^1$ respektiert, d.h. ρ ist hier reduzibel.

Beispiel. Es wird $\mathbb{C}l(2)^o$ erzeugt durch 1 und $E_1 E_2$. Wir setzen $I := E_1 \cdot E_2$ und stellen fest, daß $I^2 = -1$, d.h. $\mathbb{C}l(2)^o$ ist nichts anderes als $\mathbb{C}$. Da $1^* = 1$ und $I^* = -I$, ist die Transposition $*$ komplexe Konjugation. Die

Bedingung $x \cdot x^* = 1$ in der Definition der Spin-Gruppe zeigt uns, daß $\text{Spin}(2) = S^1 \subset \mathbb{C}$, denn $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \cdot E_1 \oplus \mathbb{R} \cdot E_2$ wird von diesen Elementen in sich überführt wie folgende Rechnung zeigt:

Wir schreiben $e^{It} = \cos(t) + \sin(t) \cdot I$. Dann gilt:

$$e^{It} \cdot E_1 \cdot e^{-It} = (\cos(t)E_1 + \sin(t)E_2)(\cos(t) - \sin(t)I) =$$

$$= \cos^2(t)E_1 + 2\sin(t)\cos(t)E_2 - \sin^2(t)E_1 = \cos(2t)E_1 + \sin(2t)E_2$$

und analog $e^{It} \cdot E_2 \cdot e^{-It} = \cos(2t)E_2 - \sin(2t)E_1$.

Also ist die Überlagerung $\Theta: \text{Spin}(2) \rightarrow \text{SO}(2)$ gegeben durch

$$e^{It} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Wie operiert nun e^{It} vermöge der Spin-Darstellung auf $\Sigma_2 = \Delta_2^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$?

Es operiert $I = E_1 E_2$ wie $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Also operiert

$$e^{It} \text{ wie } \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}.$$

Beispiel. Ähnlich ist auch der Fall $n = 3$. Es wird $\text{Cl}(3)^{\circ}$ aufgespannt durch $1, I, J, K$, wobei $I = E_1 E_2, J = E_3 E_1$ und $K = E_3 E_2$ ist. Es gilt $I^2 = J^2 = K^2 = -1, IJ = K, JK = I$ und $KI = J$, d.h. $\text{Cl}(3)^{\circ} = \mathbb{H}$, dem Quaternionenschiefkörper. Die Transposition $*$ ist quaternionale Konjugation. Wir sehen, daß $\text{Spin}(3)$ die Einheitssphäre in $\mathbb{H}$ ist. Wir zerlegen $\mathbb{H}$ als $\mathbb{C}$ -Vektorraum $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus J \cdot \mathbb{C} = \mathbb{C}^2$. Es operiert $\mathbb{H}$ von links auf sich selbst und damit auf $\mathbb{C}^2$ durch quaternionale Multiplikation. Dabei operiert

$$q = q_1 + Jq_2 \text{ wie die Matrix } \begin{pmatrix} q_1 & -q_2^* \\ q_2 & q_1^* \end{pmatrix}. \text{ Dies liefert einen Isomorphismus zwischen } \text{Spin}(3) \text{ und } \text{SU}(2).$$

Man rechnet leicht nach, daß $\text{SU}(2)$ vermöge dieses Isomorphismus und der Spin-Darstellung auf $\Sigma_3 = \Delta_4^{\circ} = \mathbb{C}^2$ durch seine Standarddarstellung, d.h. durch Matrixmultiplikation, operiert.

Wie im obigen Beispiel sieht man, daß unter der zweifachen Überlagerung

$\Theta': \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$ die Matrix $\begin{pmatrix} e^{It} & 0 \\ 0 & e^{-It} \end{pmatrix}$ abgebildet wird auf

$$\begin{bmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) & 0 \\ \sin(2t) & \cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Lie-Algebra $\mathfrak{spin}(n)$ von $\text{Spin}(n)$ ist in $\text{Cl}(n)$ eingebettet und wird von den $E_i \cdot E_j, i < j$, aufgespannt. Da $\Theta: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ eine Überlagerung ist, ist das Differential $\Theta_*: \mathfrak{spin}(n) \rightarrow \mathfrak{so}(n)$ ein Isomorphismus. Für eine Matrix $(a_{ij}) \in \mathfrak{so}(n)$ gilt $(\Theta_*)^{-1}(a_{ij}) = -(1/4)\Sigma a_{ij}E_i E_j$, siehe z.B. [Roe, Lemma 10.24].

Spin-Strukturen. Sei M eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\text{SO}(M)$ das $\text{SO}(n)$ -Prinzipalbündel der orientierten Basen der Tangentialräume. Ein $\text{Spin}(n)$ -Prinzipalbündel $\text{Spin}(M)$ über M heißt *Spin-Struktur* von M , falls es eine zweifache Überlagerungsabbildung $\varphi: \text{Spin}(M) \rightarrow \text{SO}(M)$ gibt, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spin}(M) \times \text{Spin}(n) & \longrightarrow & \text{Spin}(M) \\ \downarrow \varphi \times \Theta & & \downarrow \varphi \\ \text{SO}(M) \times \text{SO}(n) & \longrightarrow & \text{SO}(M) \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ M \\ \nwarrow \end{array}$$

Die waagrechten Pfeile stellen die Operation der Strukturgruppe auf ihrem jeweiligen Prinzipalbündel dar.

Das *Spinorbündel* auf M ist das zu $\text{Spin}(M)$ bzgl. der Spin-Darstellung assoziierte Vektorbündel. Wir bezeichnen es mit ΣM . Es hat als Modellfaser den $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ -dimensionalen komplexen Vektorraum Σ_n .

Wenn wir das Tangentialbündel TM von M als das zu $\text{SO}(M)$ bzgl. der Standarddarstellung auf dem $\mathbb{R}^n$ assoziierte Vektorbündel auffassen, dann

können wir wie folgt eine Cliffordoperation von TM auf ΣM definieren:

$$[\varphi(q), x] \cdot [q, \sigma] = [q, x \cdot \sigma] .$$

Dabei ist $q \in \text{Spin}(M)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \Sigma_n$. Diese Operation ist wohldefiniert und setzt sich in natürlicher Weise auf $\text{Cl}(M)$ fort.

Den Levi-Civita-Zusammenhang auf M können wir uns zum Beispiel durch seine Zusammenhangsform ω auf $SO(M)$ gegeben denken. Wir liften ω zu einer Zusammenhangsform $\tilde{\omega}$ auf $\text{Spin}(M)$, genauer $\tilde{\omega} = \Theta^{-1} \cdot \varphi^* \omega$. Das wiederum induziert eine kovariante Ableitung ∇^Σ auf ΣM .

Schließlich ist das Hermitesche Skalarprodukt auf $\Sigma_n \text{Spin}(n)$ -invariant, d.h. ΣM ist ein Hermitesches Vektorbündel. Damit wird ΣM zu einem Clifford-Bündel, der zugehörige Dirac-Operator D ist der *klassische Dirac-Operator*.

LEMMA 4.1. Seien Γ_{ij}^k die Christoffelsymbole des Levi-Civita-Zusammenhang bzgl. eines ON-Rahmens $E_1, \dots, E_n$. Sei q ein lokaler Schnitt in $\text{Spin}(M)$ mit $\varphi \cdot q = (E_1, \dots, E_n)$. Dann gilt:

$$\nabla_i^\Sigma [q, \sigma] = [q, \{ \partial_i - (1/4) \sum \Gamma_{ij}^k E_k \cdot E_j \} \sigma] .$$

BEWEIS: Siehe ICGLS, S. 82 f.f. ■

LEMMA 4.2. (i) Für den Krümmungstensor R^Σ von ∇^Σ gilt:

$$R^\Sigma(X, Y) = -(1/4) \sum_k (R(X, Y) E_k) \cdot E_k .$$

(ii) Für den Krümmungsendomorphismus K gilt:

$$K = (1/4) \cdot S,$$

wobei S die Skalkrümmung von M ist.

BEWEIS: Siehe IRoe, S. 1261. ■

5. HOMOGENE RÄUME

Wir wollen nun den klassischen Dirac-Operator auf einem orientierten homogenen Raum $M = G/H$ untersuchen, wobei wir G als einfach zusammenhängend voraussetzen. Es wird G im allgemeinen nicht effektiv, sondern nur fast effektiv auf M operieren, d.h. die Untergruppe der Elemente aus G , die trivial operieren, ist diskret. Wir zerlegen die Liealgebra $\mathfrak{g}$ von G in die Unteralgebra $\mathfrak{h}$ und ein Ad_H -invariantes Komplement $\mathfrak{p}$, also $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$. Es trage M eine G -homogene Riemannsche Metrik; eine solche Metrik entspricht einem Ad_H -invarianten Skalarprodukt auf $\mathfrak{p}$. Die Projektion $\pi : G \rightarrow M$ induziert einen Isomorphismus $\pi_* : \mathfrak{p} \rightarrow T_p M$, wobei $p = \pi(e)$ das Bild des Einheitselements aus G ist. Da G zusammenhängend ist, operiert G orientierungserhaltend. Daher hat die Isotropiedarstellung α ihr Bild in $SO(T_p M)$. Wir wählen eine Orthonormalbasis $X_1, \dots, X_n$ von $\mathfrak{p}$, um $SO(\mathfrak{p})$ mit $SO(n)$ zu identifizieren. Modulo der Identifikationen ist somit das Bild der Isotropiedarstellung in $SO(n)$ enthalten, $\alpha : H \rightarrow SO(T_p M) \cong SO(\mathfrak{p}) \cong SO(n)$. Mit $X_1, \dots, X_n$ bezeichnen wir auch die linksinvariante Fortsetzung auf G und auch die entsprechende Orthonormalbasis von $T_p M$.

LEMMA 5.1. Das Bündel $SO(M)$ der positiv orientierten Orthonormalbasen von TM kann auf kanonische Weise mit $G \times_\alpha SO(n)$ identifiziert werden, d.h. mit der Menge der Äquivalenzklassen $[g, A]$, $g \in G$, $A \in SO(n)$, wobei die Äquivalenzrelation gegeben ist durch $[g, A] = [gh, \alpha(h^{-1})A]$, $h \in H$. Wir können somit Schnitte in $SO(M)$ als α -äquivalente Abbildungen von G nach $SO(n)$ auffassen. Die Operation der Strukturgruppe $SO(n)$ ist gegeben durch $[g, A] \cdot B = [g, A \cdot B]$.

BEWEIS: Die Identifikation wird induziert durch die Abbildung $G \times SO(n) \rightarrow SO(M)$, $(g, A) \rightarrow dg(p) \cdot A$, wobei wir wieder stillschweigend den Isomorphismus zwischen $SO(n)$ und $SO(T_p M)$ verwendet haben. Die Einzelheiten sind eine leichte Übungsaufgabe. ■

Sei $\alpha' : H \rightarrow \text{Spin}(n)$ ein Liegruppenshomomorphismus, der α liftet, d.h. folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Spin}(n) \\ & \nearrow \alpha' & \downarrow \Theta \\ H & \xrightarrow{\alpha} & SO(n) \end{array}$$

Dann definieren wir durch $\text{Spin}_\alpha(M) = G \times_\alpha \text{Spin}(n)$ eine Spin-Struktur auf M . Die Überlagerungsabbildung $\varphi : \text{Spin}_\alpha(M) \rightarrow SO(M)$ ist gegeben durch $[g, \Lambda] \mapsto [g, \Theta \Lambda]$.

LEMMA 5.2. Diese Zuordnung von Lifts der Isotropiedarstellung α zu Spin-Strukturen auf M ist bijektiv.

BEWEIS: a) Sei $\text{Spin}(M)$ eine Spin-Struktur auf M . Es operiert G durch $(g, b) \mapsto dg \cdot b$ von links auf $SO(M)$. Diese Operation ist verträglich mit der Rechtsoperation von $SO(n)$. Da G einfach zusammenhängend ist, können wir diese Operation zu einer Linksoperation von G auf $\text{Spin}(M)$ liften, die mit der Rechtsoperation von $\text{Spin}(n)$ vertauscht.

Es überführt $HSO(T_p M)$ in sich, also auch $\text{Spin}(M)_p$. Sei $b' \in \text{Spin}(M)_p$ fest. Zu jedem $h \in H$ gibt es genau ein $\Lambda_h \in \text{Spin}(n)$, so daß $h \cdot b' = b' \cdot \Lambda_h$. Wir setzen $\alpha'(h) := \Lambda_h$. Man kann leicht nachrechnen, daß α' ein stetiger Gruppenhomomorphismus $H \rightarrow \text{Spin}(n)$ ist. Wir nehmen jetzt noch an, daß b' so gewählt war, daß $\varphi(b') = (X_1, \dots, X_n)$. Dann gilt für alle $h \in H$: $\varphi(b') \cdot \Theta(\alpha'(h)) = \varphi(b' \cdot \alpha'(h)) = \varphi(h \cdot b') = h \cdot \varphi(b') = h \cdot [e, 1] = [h, 1] =$

$$= [e, \alpha(h) \cdot 1] = [e, 1] \cdot \alpha(h) = \varphi(b') \cdot \alpha(h).$$

Also gilt $\alpha = \Theta \cdot \alpha'$, d.h. α' ist ein Lift von α .

Schließlich sieht man leicht, daß die Abbildung $G \times \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Spin}(M)$, $(g, \Lambda) \mapsto g \cdot b' \cdot \Lambda$, einen Isomorphismus $G \times_\alpha \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Spin}(M)$ induziert.

b) Starten wir dagegen mit einem Lift α' von α und der zugehörigen Spin-Struktur $\text{Spin}_\alpha(M) = G \times_\alpha \text{Spin}(n)$, dann ist $b' = [e, \pm 1]$, da $\varphi(b') = [e, 1]$. Für $h \in H$ gilt $h \cdot [e, \pm 1] = [h, \pm 1] = [e, \pm \alpha'(h)] = [e, \pm 1] \cdot \alpha'(h)$. Die Konstruktion aus Abschnitt a) liefert uns also α' zurück. ■

Beispiel. Sei M ein flacher Torus, d.h. $G = \mathbb{R}^n$, $H \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter. Da H diskret ist, ist die Isotropiedarstellung trivial, $\alpha(h) = 1 \in SO(n)$. Die Spin-Strukturen entsprechen somit den Gruppenhomomorphismen $H \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\} \subset \text{Spin}(n)$. Ist $b_1, \dots, b_n$ eine Basis des Gitters H , dann ist ein solcher Homomorphismus eindeutig durch Vorgabe der $\alpha'(b_i) = \varepsilon_i \in \mathbb{Z}_2$ gegeben. Es besitzt M also genau 2^n verschiedene Spin-Strukturen.

Sei $\rho : \text{Spin}(n) \rightarrow SO(\Sigma_n)$ die Spin-Darstellung, ΣM das Spinorbündel zu der zu α' gehörenden Spin-Struktur.

LEMMA 5.3. $\Sigma M = G \times_{\rho \cdot \alpha'} \Sigma_n$.

BEWEIS: $\Sigma M = \text{Spin}(M) \times_\rho \Sigma_n = (G \times_\alpha \text{Spin}(n)) \times_\rho \Sigma_n$. Man verifiziert leicht, daß die Abbildungen $\Sigma M \rightarrow G \times_{\rho \cdot \alpha'} \Sigma_n$, $[(g, \Lambda), v] \mapsto [g, \rho(\Lambda)v]$, und $G \times_{\rho \cdot \alpha'} \Sigma_n \rightarrow \Sigma M$, $[g, v] \mapsto [(g, 1), v]$, wohldefiniert sind. Dann sind sie offensichtlich auch invers zueinander und liefern die gewünschte Identifikation. ■

Beispiel. Betrachten wir wieder den Torus $M = G/H = \mathbb{R}^n/H$. Sei ΣM

das Spinorbündel, das zu der Spin-Struktur gehört, die dem Tupel $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ entspricht. Setze $\delta_i = 0$, falls $\varepsilon_i = 1$, und $\delta_i = 1$, falls $\varepsilon_i = -1$. Wir definieren $\Phi = \Phi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$, $\Phi(x) = e^{i\pi \sum \delta_j x_j}$, $x = \sum x_j b_j$. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $z = \sum z_j b_j \in H$, also $z_j \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$\Phi(x+z) = e^{i\pi \sum \delta_j z_j} \cdot \Phi(x) = \varepsilon_1^{z_1} \cdot \dots \cdot \varepsilon_n^{z_n} \cdot \Phi(x).$$

Wir betrachten nun $\Psi : \Sigma M = \mathbb{R}^n \times_{\rho, \alpha} \Sigma_n \rightarrow M \times \Sigma_n$, $[x, v] \rightarrow ([x], \Phi(x) \cdot v)$. Ψ ist wohldefiniert, denn

$$\begin{aligned} [x-z, \rho \cdot \alpha'(z) \cdot v] &\rightarrow ([x-z], \Phi(x-z) \rho(\alpha'(z)) \cdot v) = \\ &= ([x], \varepsilon_1^{-z_1} \cdot \dots \cdot \varepsilon_n^{-z_n} \cdot \Phi(x) \cdot \rho(\varepsilon_1^{z_1} \cdot \dots \cdot \varepsilon_n^{z_n}) \cdot v) = \\ &= ([x], \Phi(x) \cdot v). \end{aligned}$$

Damit haben wir gesehen, daß auf dem Torus das Spinorbündel zu jeder Spin-Struktur trivial ist.

Sei $\iota : SO(n) \rightarrow GL(n)$ die Standarddarstellung auf dem $\mathbb{R}^n$.

LEMMA 5.4. Das Tangentialbündel unseres homogenen Raumes schreibt sich dann als

$$TM = G \times_{\iota, \alpha} \mathbb{R}^n.$$

BEWEIS: Die Identifikation

$$TM = SO(M) \times_{\iota} \mathbb{R}^n = (G \times_{\alpha} SO(n)) \times_{\iota} \mathbb{R}^n = G \times_{\iota, \alpha} \mathbb{R}^n$$

ist gegeben durch $dg \cdot A \cdot v \leftrightarrow [g, A] \cdot v \leftrightarrow [g, \iota(A) \cdot v]$. ■

LEMMA 5.5. Schreiben wir TM als $TM = G \times_{\iota, \alpha} \mathbb{R}^n$ und ΣM als $\Sigma M = G \times_{\rho, \alpha} \Sigma_n$, dann ist die Cliffordmultiplikation von TM auf ΣM gegeben durch $[g, x] \cdot [g, v] = [g, x \cdot v]$.

BEWEIS: Einsetzen der Definitionen. ■

Bezüglich der Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ bezeichnen wir mit $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{p}}$ den $\mathfrak{p}$ -Anteil der Lieklammer $[\cdot, \cdot]$. Auf $\mathfrak{p}$ erklären wir die symmetrische bilineare Abbildung $U : \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ durch

$$2\langle U(X, Y), Z \rangle = \langle [Z, X]_{\mathfrak{p}}, Y \rangle + \langle X, [Z, Y]_{\mathfrak{p}} \rangle \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{p}.$$

SATZ 5.6. Sei $E_1, \dots, E_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Für ein Spinorfeld $g \mapsto [g, \Psi(g)]$ gilt für den klassischen Dirac-Operator D :

$$\begin{aligned} D[g, \Psi(g)] &= \\ &= [g, \sum_j E_j \cdot \{ X_j(\Psi) \Big|_g + \rho_*(\Theta_*^{-1}(-\frac{1}{2} [X_i, X_j]_{\mathfrak{p}} + U(X_i, X_j))_{i=1, \dots, n}) \cdot \Psi(g) \}]. \end{aligned}$$

Dabei ist das n -Tupel $(-\frac{1}{2} [X_i, X_j]_{\mathfrak{p}} + U(X_i, X_j))_{i=1, \dots, n}$ von Vektoren aus $\mathfrak{p}$ in der Basis $X_1, \dots, X_n$ auszudrücken und so als ein Element aus $\mathfrak{so}(n)$ aufzufassen, auf das wir Θ_*^{-1} anwenden können.

KOROLLAR 5.7. Ist M natürlich reaktiv, d.h. $U = 0$, dann gilt:

$$D[g, \Psi(g)] = [g, \sum_j E_j \cdot \{ X_j(\Psi) \Big|_g + \rho_*(\Theta_*^{-1}(-\frac{1}{2} [X_i, X_j]_{\mathfrak{p}}))_{i=1, \dots, n}) \cdot \Psi(g) \}].$$

■

KOROLLAR 5.8. Ist $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}$, zum Beispiel falls M symmetrisch ist, dann gilt $D[g, \Psi(g)] = [g, \sum E_j \cdot X_j(\Psi) \Big|_g]$. ■

KOROLLAR 5.9. Ist $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}$, dann gilt

$$D^2[g, \Psi(g)] = [g, -\sum_i X_i^2(\Psi) + \sum_{i < j} E_i \cdot E_j \cdot [X_i, X_j](\Psi)].$$

BEWEIS von Korollar 5.9.: Wir berechnen

$$\sum_{ij} E_i \cdot E_j \cdot X_i(X_j(\Psi)) =$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_i (X_i)^2(\psi) + \sum_{i < j} E_i \cdot E_j \cdot (X_i \cdot X_j - X_j \cdot X_i)(\psi) \\
&= - \sum_i (X_i)^2(\psi) + \sum_{i < j} E_i \cdot E_j \cdot [X_i, X_j](\psi).
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. ■

Die Ergebnisse dieses Abschnitts wurden für den Spezialfall, daß M ein einfach zusammenhängender symmetrischer Raum ist, bereits in [CaGu] gezeigt.

Doch nun zur Formel für D für den homogenen Raum M :

BEWEIS von Satz 5.6: a) Sei $X \in \mathfrak{p}$, $X' = \pi_* X \in T_p M$, $g_o \in G$. Wir wählen $\Lambda(t) \in \text{Spin}(n)$ so, daß $\Lambda(0) = 1$ und die Kurve $t \rightarrow [e^{tX}, \Lambda(t)]$ in $\text{Spin}(M)$ horizontal ist. Da die horizontale Distribution, die vom Levi-Civita-Zusammenhang herkommt, invariant unter der Linksoperation von G auf $\text{Spin}(M)$ ist, ist auch die Kurve $t \rightarrow [g_o e^{tX}, \Lambda(t)]$ horizontal. Für den horizontalen Lift $(dg_o \cdot X')^{\text{spin}}$ von $dg_o \cdot X'$ nach $\text{Spin}(M)$ gilt somit

$$(dg_o \cdot X')^{\text{spin}}([g_o, 1_{\text{Spin}(n)}]) = \frac{d}{dt} [g_o e^{tX}, \Lambda(t)]|_{t=0}.$$

Entsprechend gilt für den Lift nach $\text{SO}(M)$

$$(dg_o \cdot X')^{\text{so}}([g_o, 1_{\text{SO}(n)}]) = \frac{d}{dt} [g_o e^{tX}, \Theta \cdot \Lambda(t)]|_{t=0}.$$

b) Sei $g\rho \rightarrow [g, \psi(g)] \cong [[g, \Lambda], \sigma(g, \Lambda)]$ ein Schnitt in ΣM . Dabei deutet „ $\cong$ “ den Isomorphismus von $G \times_{\rho, \alpha} \Sigma_n$ und $(G \times_{\alpha} \text{Spin}(n)) \times_{\rho} \Sigma_n$ an. Es gilt für alle $g \in G$ und $\Lambda \in \text{Spin}(n)$:

$$\psi(g) = \sigma(g, 1), \sigma(g, \Lambda) = \rho(\Lambda^{-1})\psi(g).$$

Wir berechnen $\nabla_{dg_o \cdot X'}^\Sigma [g, \psi(g)]$.

$$\begin{aligned}
\nabla_{dg_o \cdot X'}^\Sigma [[g, \Lambda], \sigma(g, \Lambda)] &= [[g_o, 1], (dg_o \cdot X')^{\text{spin}}|_{[g_o, 1]} \sigma(g, \Lambda)] \cong \\
&\cong [g_o, (dg_o \cdot X')^{\text{spin}}|_{[g_o, 1]} \sigma(g, \Lambda)].
\end{aligned}$$

$$(dg_o \cdot X')^{\text{spin}}|_{[g_o, 1]} \sigma(g, \Lambda) = \frac{d}{dt} \sigma(g_o e^{tX}, \Lambda(t))|_{t=0} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt} \rho(\Lambda(t)^{-1}) \cdot \psi(g_o e^{tX})|_{t=0} = \\
&= -\rho_*(\dot{\Lambda}(0)) \psi(g_o) + dL_{g_o} \cdot X(\psi) = \\
&= -\rho_*(\dot{\Lambda}(0)) \psi(g_o) + X|_{g_o}(\psi).
\end{aligned}$$

c) Wir berechnen $\dot{\Lambda}(0)$. Da die Kurve $t \rightarrow [e^{tX}, \Theta \cdot \Lambda(t)]$ horizontal in $\text{SO}(M)$ ist, gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\nabla}{dt} [e^{tX}, \Theta \cdot \Lambda(t)]|_{t=0} = \frac{\nabla}{dt} \{ de^{tX} \cdot \Theta(\Lambda(t)) \}|_{t=0} = \\
&= \Theta_* \cdot \dot{\Lambda}(0) + \frac{\nabla}{dt} \{ de^{tX} \cdot (X_1, \dots, X_n) \}|_{t=0}.
\end{aligned}$$

Also gilt $\dot{\Lambda}(0) = -\Theta_*^{-1} \cdot \frac{\nabla}{dt} \{ de^{tX} \cdot (X_1, \dots, X_n) \}|_{t=0}$.

Sei nun $c(s)$ eine Integralkurve zu X_i in M . Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla}{dt} de^{tX} \cdot c'(0)|_{t=0} &= \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial}{\partial s} e^{tX} \cdot c(s)|_{s=t=0} = \\
&= \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} e^{tX} \cdot c(s)|_{s=t=0} = \\
&= \frac{\nabla}{ds} X'(c(s))|_{s=0} = \\
&= \nabla_{X_i} X' = \\
&= -\frac{1}{2} [X_i, X]_{\mathfrak{p}} + U(X_i, X).
\end{aligned}$$

Zur letzten Gleichung siehe [Bes2, Prop. 7.28]. Also erhalten wir für $\dot{\Lambda}(0)$:

$$\dot{\Lambda}(0) = -\Theta_*^{-1} \left(-\frac{1}{2} [X_i, X]_{\mathfrak{p}} + U(X_i, X) \right)_{i=1, \dots, n}.$$

d) Fassen wir zusammen:

$$\begin{aligned}
&(dg_o \cdot X') \cdot \nabla_{dg_o \cdot X'} [g, \psi(g)] = \\
&= (dg_o \cdot X') \cdot [X_o, X]|_{g_o}(\psi) + \rho_* \Theta_*^{-1} \left(-\frac{1}{2} [X_i, X]_{\mathfrak{p}} + U(X_i, X) \right)_{i=1, \dots, n} \cdot \psi(g_o).
\end{aligned}$$

Den Dirac-Operator erhalten wir, indem wir für X die orthonormalen Vektoren X_j einsetzen und über j summieren:

$$\begin{aligned}
D[g, \psi(g)]|_{g=g_o} &= \sum (dg_o \cdot X_j) \cdot \nabla_{dg_o \cdot X_j} [g, \psi(g)] = \\
&|_{g_o} \left(\sum_j E_j \cdot \{ X_j|_{g_o}(\psi) + \rho_* \Theta_*^{-1} \left(-\frac{1}{2} [X_i, X_j]_{\mathfrak{p}} + U(X_i, X_j) \right)_{i=1, \dots, n} \} \cdot \psi(g_o) \right).
\end{aligned}$$

Damit ist die Formel bewiesen. ■

Gemäß Lemma 5.3. können wir Schnitte in ΣM auffassen als Ab-

bildungen $\Psi : G \rightarrow \Sigma_n$, die der Äquivarianzbedingung $\Psi(gh) = \rho(\alpha'(h))^{-1}\Psi(g)$ für $g \in G$ und $h \in H$ genügen. Es operiert G von links auf den Schnitten durch $(g_o \Psi)(g) = \Psi(g_o^{-1}g)$. Damit haben wir eine unitäre Darstellung von G auf dem Hilbertraum $L^2(M, \Sigma M)$ erklärt. Für kompaktes G kennt man eine solche Darstellung sehr gut. Sei $\hat{G}$ die Menge der Äquivalenzklassen von irreduziblen unitären Darstellungen von G . Dann gilt:

SATZ 5.10. (Frobenius-Reziprozität)

Die Darstellung der kompakten Gruppe G auf $L^2(M, \Sigma M)$ ist äquivalent

$$\text{zu } \bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} V_\gamma \otimes \text{Hom}_H(V_\gamma, \Sigma_n).$$

Dabei ist (V_γ, π_γ) ein Repräsentant von γ in $\hat{G}$ und $\text{Hom}_H(V_\gamma, \Sigma_n)$ der Vektorraum der H -Modul-Homomorphismen von V_γ nach Σ_n , wobei H durch $\pi_\gamma|_H$ bzw. $\rho \circ \alpha'$ operiert.

Es operiert $g \in G$ auf $v \otimes A \in V_\gamma \otimes \text{Hom}_H(V_\gamma, \Sigma_n)$ durch $g(v \otimes A) = \pi_\gamma(g)v \otimes A$ und $v \otimes A$ ist mit der H -äquivarianten Abbildung $g \rightarrow A\pi_\gamma(g^{-1})v$ zu identifizieren. Insbesondere besteht $V_\gamma \otimes \text{Hom}_H(V_\gamma, \Sigma_n)$ aus C^∞ -Schnitten.

Zum Beweis siehe [Wall, Theorem 5.3.6] oder [Br-tD, Chapter III].

Die Formel für den Dirac-Operator aus Satz 5.6. zeigt, daß D mit der Operation von G auf $C^\infty(M, \Sigma M)$ vertauscht. Daher läßt D die γ -isotypischen Summanden $V_\gamma \otimes \text{Hom}_H(V_\gamma, \Sigma_n)$ invariant. Genauer gilt

LEMMA 5.11. Die Einschränkung von D auf $V_\gamma \otimes \text{Hom}_H(V_\gamma, \Sigma_n)$ ist gegeben durch $\text{id} \otimes D_\gamma$, wobei

$$D_\gamma(A) = \sum_j E_j \cdot \left\{ -A \cdot (\pi_\gamma)_*(X_j) + \rho_*(\Theta_*^{-1}(-\frac{1}{2}[X_i, X_j]_p + U(X_i, X_j)))_{i=1, \dots, n} \cdot A \right\}$$

BEWEIS: Sei $\Psi(g) = A\pi_\gamma(g^{-1})v$. Wir setzen

$$L_j = \rho_*(\Theta_*^{-1}(-\frac{1}{2}[X_i, X_j]_p + U(X_i, X_j)))_{i=1, \dots, n}.$$

Nach Satz 5.6. ist $D \Psi(g_o) = \sum_j E_j \cdot \{X_j(\Psi)|_{g_o} + L_j \Psi(g_o)\}$. Es gilt

$$L_j \Psi(g_o) = L_j(A\pi_\gamma(g_o^{-1})v) = (L_j A)\pi_\gamma(g_o^{-1})v \quad \text{und}$$

$$X_j(\Psi)|_{g_o} = \frac{d}{dt} \Psi(g_o e^{tX_j})|_{t=0} = \frac{d}{dt} A\pi_\gamma(e^{-tX_j}g_o^{-1})v|_{t=0} =$$

$$= -A(\pi_\gamma)_*(X_j)\pi_\gamma(g_o^{-1})v. \text{ Damit ist das Lemma bewiesen. } \blacksquare$$

Die Frobenius-Reziprozität ist ein wertvolles Hilfsmittel zur Berechnung des Spektrums des Dirac-Operators auf homogenen Räumen $M = G/H$ mit G kompakt und einfach zusammenhängend. Wir können dabei wie folgt vorgehen:

1) Bestimme $\hat{G}$.

2) Zerlege für jedes $\gamma \in \hat{G}$ die Einschränkung von γ auf H in irreduzible Bestandteile (bzgl. H).

3) Zerlege die Darstellung $\rho \circ \alpha'$ von H auf Σ_n in irreduzible Bestandteile.

4) Berechne $\text{Hom}_H(V_\gamma, \Sigma_n)$.

5) Berechne die Eigenwerte von D_γ auf $\text{Hom}_H(V_\gamma, \Sigma_n)$.

6. RIEMANNSCHE ÜBERLAGERUNGEN

Sei X eine einfach zusammenhängende Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit der Dimension n . Sei $\text{Iso}^+(X)$ die Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien von X , $\Gamma \subset \text{Iso}^+(X)$ sei eine diskrete Untergruppe, die eigentlich diskontinuierlich auf X operiert. Jedes Element $\gamma \in \Gamma$ operiert durch sein Differential d_γ von links auf $\text{SO}(X)$. Diese Operation vertauscht mit der Rechtsoperation von $\text{SO}(n)$ auf $\text{SO}(X)$. Für das $\text{SO}(n)$ -Bündel des Quotienten $M = \Gamma \backslash X$ gilt $\text{SO}(M) = \Gamma \backslash \text{SO}(X)$. Wir wollen nun die Operation von Γ auf $\text{Spin}(X)$ liften.

LEMMA 6.1. *Es gibt genau zwei Lifts $d_\gamma^* : \text{Spin}(X) \rightarrow \text{Spin}(X)$ von $d_\gamma : \text{SO}(X) \rightarrow \text{SO}(X)$. Es vertauscht d_γ^* mit der Rechtsoperation von $\text{Spin}(n)$ auf $\text{Spin}(X)$. Ferner gilt $d_\gamma^* = d_{\gamma^-} \cdot (-1)$.*

BEWEIS: Für $n \geq 3$ ist neben X auch $\text{Spin}(n)$ einfach zusammenhängend, daher auch $\text{Spin}(X)$. Dann können wir sicher liften, und da $\varphi : \text{Spin}(X) \rightarrow \text{SO}(X)$ eine zweifache Überlagerung ist, auf genau zwei Weisen. Für $n = 2$ funktioniert dieses Argument leider nicht, daher machen wir einen anderen Beweis.

Wir wählen $q_1, q_2 \in \text{Spin}(X)$ so, daß $d_\gamma \cdot \varphi(q_1) = \varphi(q_2)$ und definieren die Fasereinbettungen $j_\nu : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Spin}(X)$ durch $j_\nu(g) = q_\nu \cdot g$. Es gilt:

$$\begin{aligned} d_\gamma \cdot \varphi(j_1(g)) &= d_\gamma \cdot \varphi(q_1 g) = d_\gamma \cdot (\varphi(q_1) \Theta(g)) = (d_\gamma \cdot \varphi(q_1)) \Theta(g) = \\ &= \varphi(q_2) \Theta(g) = \varphi(q_2 g) = \varphi(j_2(g)). \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Spin}(n) & \\ j_1 \swarrow & & \searrow j_2 \\ \text{Spin}(X) & & \text{Spin}(X) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ \text{SO}(X) & \xrightarrow{d_\gamma} & \text{SO}(X) \end{array}$$

An dem Ausschnitt $\pi_1(\text{Spin}(n)) \xrightarrow{(j_\nu)_*} \pi_1(\text{Spin}(X)) \longrightarrow \pi_1(X) = 0$ aus der exakten Homotopiesequenz für Faserbündel sehen wir, daß $(j_\nu)_*$ surjektiv ist. Somit gilt:

$$\begin{aligned} d_\gamma \cdot \varphi_* \pi_1(\text{Spin}(X)) &= d_\gamma \cdot \varphi_* (j_1)_* \pi_1(\text{Spin}(n)) = d_\gamma \cdot (j_2)_* \pi_1(\text{Spin}(n)) \\ &= d_\gamma \cdot \pi_1(\text{Spin}(X)). \end{aligned}$$

Damit ist das Liftungskriterium erfüllt, und wir erhalten genau zwei Lifts d_γ^* .

Jetzt zeigen wir, daß d_γ^* mit der Operation von $\text{Spin}(n)$ vertauscht. Sei dazu $q \in \text{Spin}(X)$ fest. Für jedes $g \in \text{Spin}(n)$ gibt es ein $\epsilon(g) \in \mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$, so daß $d_\gamma^*(qg) = (d_\gamma^*q)(\epsilon(g)g)$. Weil die linke Seite stetig in g ist, ist $\epsilon : \text{Spin}(n) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ konstant. Wegen $\epsilon(1) = +1$ ist $\epsilon \equiv +1$. Das bedeutet gerade, daß d_γ^* mit der Rechtsoperation von $\text{Spin}(n)$ verträglich ist. Für d_{γ^-} ist das Argument dasselbe.

Daß $d_{\gamma^-} = d_\gamma^* \cdot (-1)$ ist, ist klar, denn mit d_γ^* ist auch $d_\gamma^* \cdot (-1)$ ein Lift von d_γ . ■

KOROLLAR 6.2. *Es operiert d_γ^* durch $d_\gamma^* \cdot [g, \sigma] = [d_\gamma^* \cdot g, \sigma]$ auf dem Spinorbündel ΣM . ■*

Es bildet $\Gamma' := \{d_\gamma^* \mid \gamma \in \Gamma\}$ eine Gruppe, die unter $\pi' : \Gamma' \rightarrow \Gamma$, $d_\gamma^* \rightarrow \gamma$, surjektiv auf Γ abgebildet wird.

Beispiel. Für die Sphäre $X = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist das $\text{SO}(n)$ -Bündel gerade die $\text{SO}(n+1)$, wobei die Projektion auf S^n die Projektion auf den letzten Spaltenvektor ist. Die übrigen Spaltenvektoren bilden die orientierte ON-Basis des Tangentialraumes, der hier als Untervektorraum des $\mathbb{R}^{n+1}$ betrachtet wird. Ein Element A aus der Strukturgruppe $\text{SO}(n)$ operiert

durch Rechtsmultiplikation mit der Matrix $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ auf $SO(n+1)$. Der Totalraum des $\text{Spin}(n)$ -Prinzipalbündels ist $\text{Spin}(n+1)$, und $\varphi : \text{Spin}(n+1) \rightarrow SO(n+1)$ ist die universelle Überlagerung, die sonst mit θ bezeichnet wird. Eine diskrete Untergruppe $\Gamma \subset \text{Iso}^+(S^n) = SO(n+1)$ operiert durch Linksmultiplikation auf $SO(S^n) = SO(n+1)$. Für die Gruppe Γ' gilt daher $\Gamma' = \theta^{-1}(\Gamma) \subset \text{Spin}(n+1)$. Es operiert Γ' dann durch Linksmultiplikation auf $\text{Spin}(S^n) = \text{Spin}(n+1)$.

Ist $\epsilon : \Gamma' \rightarrow \Gamma$ ein Gruppenhomomorphismus mit $\pi'_*\epsilon = \text{id}_\Gamma$, dann operiert Γ vermöge ϵ auf $\text{Spin}(X)$. Durch $\text{Spin}_\epsilon(M) := \epsilon(\Gamma') \backslash \text{Spin}(X)$ ist eine Spin-Struktur auf M erklärt, so daß

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spin}(X) & \xrightarrow{\varphi} & SO(X) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spin}_\epsilon(M) & \xrightarrow{\varphi_\epsilon} & SO(M) & \longrightarrow & M \end{array}$$

kommutiert.

Man sieht leicht, daß man auf diese Weise auch alle Spin-Strukturen von M erhält, d.h. die Menge der Spin-Strukturen auf M steht in 1-1-Korrespondenz zu den Homomorphismen $\epsilon : \Gamma' \rightarrow \Gamma$ mit $\pi'_*\epsilon = \text{id}_\Gamma$. Für die Details siehe [Fr1, Satz 51].

Es operiert Γ durch ϵ auch auf ΣX , und für das zu $\text{Spin}_\epsilon(M)$ assoziierte Spinorbündel $\Sigma_\epsilon M$ gilt natürlich

$$\Sigma_\epsilon M = \epsilon(\Gamma') \backslash \Sigma X.$$

Der Dirac-Operator D auf ΣX und der Dirac-Operator D_ϵ auf $\Sigma_\epsilon M$ sehen lokal gleich aus, d.h. es kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(M, \Sigma_\epsilon M) & \longrightarrow & C^\infty(X, \Sigma X) \\ \downarrow D_\epsilon & & \downarrow D \\ C^\infty(M, \Sigma_\epsilon M) & \longrightarrow & C^\infty(X, \Sigma X) \end{array},$$

wobei die waagerechten Pfeile durch „Zurückziehen“ der entsprechenden Schnitte entstehen.

PROPOSITION 6.3. *Ist $X = G$ eine einfach zusammenhängende Liegruppe mit linksinvarianter Metrik, $\Gamma \subset G$ ein Gitter, dann ist $\Gamma' \approx \Gamma \times \mathbb{Z}_2$, und $\pi' : \Gamma' \rightarrow \Gamma$ ist die Projektion auf den ersten Faktor. Somit haben die betrachteten Homomorphismen $\epsilon : \Gamma' \rightarrow \Gamma$ die Form $\epsilon = \text{id}_\Gamma \times \epsilon'$, wobei ϵ' ein beliebiger Homomorphismus von Γ nach $\mathbb{Z}_2$ ist.*

BEWEIS: Wir wählen eine positiv orientierte ON-Basis $X_1, \dots, X_n$ aus $\mathfrak{g}$. Dies liefert folgende Trivialisierung von $SO(G)$:

$$G \times SO(n) \rightarrow SO(G), \quad (g, A) \mapsto (X_1(g), \dots, X_n(g)) \cdot A.$$

Daher gilt für die (eindeutige) Spin-Struktur von G

$$\text{Spin}(G) \cong G \times \text{Spin}(n), \quad \varphi \cong \text{id}_G \times \theta.$$

In obiger Trivialisierung von $SO(G)$ gilt $d_Y \cdot (g, A) = (\gamma g, A)$. Wir setzen $d_Y^+ \cdot (g, q) = (\gamma g, q)$ und $d_Y^- \cdot (g, q) = (\gamma g, -q)$. Der Isomorphismus zwischen $\Gamma \times \mathbb{Z}_2$ und Γ' ist dann gegeben durch $(\gamma, +1) \leftrightarrow d_Y^+$ und $(\gamma, -1) \leftrightarrow d_Y^-$. ■

7. KILLING-SPINOREN

Sei M eine n -dimensionale Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit Spinorbündel ΣM , Spin-Zusammenhang ∇^Σ und Dirac-Operator D .

Definition. Ein nicht identisch verschwindendes Spinorfeld Ψ heißt *Killing-Spinor* (eigentlich Killing-Spinorfeld) zu $\mu \in \mathbb{C}$, falls für alle $X \in TM$ gilt:

$$\nabla_X^\Sigma \Psi = \mu X \cdot \Psi.$$

Killing-Spinoren treten recht selten auf; ihre Existenz zieht starke Einschränkungen an die Mannigfaltigkeit M nach sich. Viele dieser Beziehungen finden sich in [CGLS], wir beschränken uns hier darauf, die wichtigsten anzugeben.

PROPOSITION 7.1. *Es besitze M einen Killing-Spinor zu μ . Dann ist M eine Einstein-Mannigfaltigkeit mit der Einstein-Konstanten $4(n-1)\mu^2$. Insbesondere ist μ reell oder rein imaginär.*

BEWEIS: [CGLS, Prop. 5]. ■

PROPOSITION 7.2. *Sei M einfach zusammenhängend und von konstanter Schnittkrümmung $4\mu^2$. Dann gibt es $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ Killing-Spinoren zu μ auf M , die in jedem Punkt linear unabhängig sind. Das Spinor-Bündel wird also durch Killing-Spinoren trivialisiert.*

BEWEIS: [CGLS, Prop. 11]. ■

II. BEISPIELE

1. FLACHE TORI

Als erstes Beispiel berechnen wir das Spektrum des klassischen Dirac-Operators auf flachen Tori $M = \mathbb{R}^n/H$, wobei $H \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter ist. Dazu bestimmen wir zunächst die Eigenwerte von D^2 . Dies ist in [Fr3] bereits durchgeführt worden, aber weil es mit den Vorbereitungen aus dem ersten Kapitel so einfach ist, rechnen wir die Eigenwerte hier noch einmal aus.

Sei $b_1^*, \dots, b_n^*$ eine $\mathbb{Z}$ -Basis des zu H dualen Gitters H^* . Die Spin-Strukturen von M werden durch n -Tupel $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, $\delta_j \in \{0, 1\}$, klassifiziert, siehe Abschnitt 1.5. Sei jetzt δ fest. Wir betrachten wieder die „trivialisierende“ Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow S^1$, $\phi(x) = e^{\pi i \sum \delta_j b_j^*(x)}$. Durch $\Sigma M \rightarrow M \times \Sigma_n$, $(x, v) \mapsto (x, \phi(x) \cdot v)$, wird das Spinorbündel trivialisiert. Wir benutzen das vom $\mathbb{R}^n$ kommende Standardorthonormalbein $\partial_1, \dots, \partial_n$. Man beachte den kleinen Notationsunterschied zum Abschnitt 1.5. Lemma 1.4.1 besagt, daß $\nabla_i^\Sigma [x, v(x)] = [x, \partial_i v(x)]$, und somit

$$D^2[x, v(x)] = (\nabla^\Sigma)^* \nabla^\Sigma [x, v(x)] = [x, \Delta_o v(x)].$$

Eine Basis von $L^2(M, \mathbb{R})$ aus Eigenfunktionen von Δ_o ist gegeben durch die $v_{b^*}(x) = e^{2\pi i b^*(x)}$, $b^* \in H^*$. Sei $\sigma \in \Sigma_n$ fest. Wir wenden nun D^2 auf das Spinorfeld an, das bzgl. obiger Trivialisierung die Gestalt $[x] \mapsto ([x], v_{b^*}(x) \sigma)$ hat. Also

$$\begin{aligned} D^2([x], v_{b^*}(x) \sigma) &\mapsto D^2[x, \phi(x)^{-1} \cdot v_{b^*}(x) \sigma] = \\ &= [x, \Delta_o(\phi(x)^{-1} \cdot v_{b^*}(x) \sigma)] = \\ &= [x, \{\Delta_o(\phi(x)^{-1}) \cdot v_{b^*}(x) - 2\langle \text{grad}(\phi(x)^{-1}), \text{grad} v_{b^*}(x) \rangle \\ &\quad + \phi(x)^{-1} \cdot \Delta_o v_{b^*}(x)\} \sigma] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [x, \{-\sum_k (-i\pi \sum_j \delta_j (b_j^*)_k)^2 - 2\sum_k (-i\pi \sum_j \delta_j (b_j^*)_k) \cdot 2\pi i (b^*)_k \\
&\quad + 4\pi |b^*|^2\} \cdot \phi(x)^{-1} \cdot v_{b^*}(x) \cdot \phi] = \\
&= 4\pi^2 |b^* - \frac{1}{2} \sum_j \delta_j b_j^*|^2 [x, \phi(x)^{-1} \cdot v_{b^*}(x) \cdot \phi] \\
&\leftrightarrow 4\pi^2 |b^* - \frac{1}{2} \sum_j \delta_j b_j^*|^2 ([x], v_{b^*}(x) \cdot \phi).
\end{aligned}$$

Also entspricht der Zuordnung $[x] \mapsto ([x], v_{b^*}(x) \cdot \phi)$ ein Eigenspinorfeld von D^2 zum Eigenwert $4\pi^2 |b^* - \frac{1}{2} \sum_j \delta_j b_j^*|^2$. Da die Dimension von Σ_n $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ ist, hat $4\pi^2 |b^* - \frac{1}{2} \sum_j \delta_j b_j^*|^2$ die Multiplizität $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Die Eigenwerte von D sind somit $\pm 2\pi |b^* - \frac{1}{2} \sum_j \delta_j b_j^*|$. Wir wollen jetzt sehen, daß sich die Multiplizitäten gleichmäßig auf die positiven und negativen Wurzeln von $4\pi^2 |b^* - \frac{1}{2} \sum_j \delta_j b_j^*|^2$ verteilen.

Eine Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma_n$, $x \mapsto v(x)$, definiert genau dann ein Spinorfeld $x \mapsto [x, v(x)]$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $z \in H$ gilt

$$v(x-z) = \rho(\alpha'(z)) \cdot v(x).$$

Wir spiegeln jetzt v am Ursprung, d.h. wir setzen $\tilde{v}(x) := v(-x)$. Mit v erfüllt auch $\tilde{v}$ obige Periodizitätsbedingung, denn $\alpha'(-z) = \alpha'(z)$ für alle $z \in H$. Damit ist das Spinorfeld $[x] \mapsto [x, \tilde{v}(x)]$ wohldefiniert.

Jetzt wollen wir annehmen, daß $[x] \mapsto [x, v(x)]$ ein Eigenspinorfeld von D zum Eigenwert λ ist. Dann ist

$$\begin{aligned}
D[x, \tilde{v}(x)] &= [x, \sum E_j \cdot \partial_j \tilde{v}(x)] = \\
&= [x, -\sum E_j \cdot \partial_j v(-x)] = \\
&= -\lambda [x, \tilde{v}(x)].
\end{aligned}$$

Durch die Spiegelung wird also der λ -Eigenraum isomorph in den $(-\lambda)$ -Eigenraum überführt, also haben λ und $-\lambda$ dieselbe Multiplizität.

Insgesamt erhalten wir

SATZ 1.1. *Der klassische Dirac-Operator, der zur Spin-Struktur gehört, die $\delta \in (\mathbb{Z}_2)^n$ entspricht, hat $\pm 2\pi |b^* - \frac{1}{2} \sum_j \delta_j b_j^*|$, $b^* \in H^*$, als Eigenwerte, und die Multiplizität ist jeweils $2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$.* ■

Friedrich hat in [Fr3] das Spektrum von D^2 auf den Tori berechnet, um zu demonstrieren, daß es signifikant von der Wahl der Spin-Struktur abhängt. Er bemerkte, daß der Eigenwert 0 nur für die Spin-Struktur $\delta = (0, \dots, 0)$ auftritt, d.h. nur dann existieren harmonische Spinorfelder.

Isospektralität. Für die Spin-Struktur zu $\delta = (0, \dots, 0)$ sind die Eigenwerte von D^2 dieselben wie die des Laplace-Beltrami-Operators Δ_0 , lediglich die Multiplizitäten sind mit $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ zu multiplizieren. Somit können wir Milnors Bemerkung übertragen, daß es in Dimension 16 zwei Tori gibt, die nicht isometrisch sind, für die aber D^2 und damit auch D bzgl. der Spin-Struktur zu $\delta = (0, \dots, 0)$ dieselben Eigenwerte hat, vgl. [Mil].

Kollaps. Wir betrachten zwei Tori $T_1 = \mathbb{R}^n/H_1$ und $T_2 = \mathbb{R}^k/H_2$ und wir wollen ihr kartesisches Produkt gegen T_1 kollabieren lassen. Dazu betrachten wir folgende Familie von Tori $T^t = T_1 \times \mathbb{R}^k/tH_2$, $t > 0$. Es gilt $T^1 = T_1 \times T_2$ und für $t \rightarrow 0$ kollabiert T^t gegen T_1 . Auf T_1 geben wir uns die Spin-Struktur zu $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ vor. Auf T^t können wir nun in natürlicher Weise die Spin-Struktur zu $(\delta, \hat{\delta}) = (\delta_1, \dots, \delta_n, \hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_k)$ betrachten. Wie verhalten sich die Dirac-Eigenwerte von T^t für $t \rightarrow 0$?

Sei $a_1^*, \dots, a_n^*$ eine $\mathbb{Z}$ -Basis von H_1^* und $b_1^*, \dots, b_k^*$ eine für H_2^* . Dann erhalten wir eine $\mathbb{Z}$ -Basis für $(H_1 \times tH_2)^*$ durch $a_1^*, \dots, a_n^*, b_1^*/t, \dots, b_k^*/t$. Die D -Eigenwerte von T^t sind $\pm 2\pi |\sum (\alpha_j - \frac{1}{2} \delta_j) a_j^* + \sum (\beta_j - \frac{1}{2} \hat{\delta}_j) b_j^*/t|$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z}$. Wir sehen also, daß die Eigenwerte für $t \rightarrow 0$ gegen $\pm \infty$ konvergieren, es sei denn, alle $(\beta_j - \frac{1}{2} \hat{\delta}_j)$ sind gleich 0. Das ist nur möglich, wenn $\hat{\delta} = 0$ und alle $\beta_j = 0$. Dann erhalten wir als Grenzwerte genau die D -Eigenwerte von T_1 . Die Multiplizitäten der Grenzwerte sind i.a. größer als die der Eigenwerte von T_1 , nämlich $2^{\lfloor (n+k)/2 \rfloor - 1}$ statt $2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$.

2. HEISENBERG-MANNIGFALTIGKEITEN

Notationen. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $z \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $g(x, y, z)$ die $(n+2) \times (n+2)$ -Matrix $\begin{bmatrix} 1 & x^t & z \\ 0 & 1_n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Die $g(x, y, z)$ bilden die Heisenberg-

Gruppe $\text{He}(n)$. Sie ist eine $(2n+1)$ -dimensionale nilpotente Liegruppe mit der Liealgebra $\mathfrak{he}(n) = \{ X(x, y, z) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R} \}$, wobei

$$X(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & x^t & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Für die Gruppenoperation gilt

$$g(x, y, z) \cdot g(x', y', z') = g(x + x', y + y', z + z' + x \cdot y'),$$

$$g(x, y, z)^{-1} = g(-x, -y, -z + x \cdot y).$$

Dabei ist $x \cdot y$ das übliche euklidische Skalarprodukt des $\mathbb{R}^n$. Die Exponentialabbildung $\exp$ ist ein globaler Diffeomorphismus, dessen Inverse wir mit $\log$ bezeichnen. Es gilt

$$\exp X(x, y, z) = g(x, y, z + \frac{1}{2} x \cdot y),$$

$$\log g(x, y, z) = X(x, y, z - \frac{1}{2} x \cdot y).$$

Wir setzen

$$X_j = X(e_j, 0, 0),$$

$$Y_j = X(0, e_j, 0),$$

$$Z = X(0, 0, 1),$$

wobei $e_1, \dots, e_n$ die Standardorthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ ist. Die einzigen nichttrivialen Kommutatoren sind $[X_j, Y_j] = -[Y_j, X_j] = Z$.

Sei $r = (r_1, \dots, r_n)$ ein n -Tupel natürlicher Zahlen, so daß jedes r_j seinen Nachfolger r_{j+1} teilt. Wir setzen

$$r\mathbb{Z}^n = \{ (r_1 x_1, \dots, r_n x_n) \mid x_j \in \mathbb{Z} \} \text{ und}$$

$$\Gamma_r = \{ g(\xi, \eta, \zeta) \mid \xi \in r\mathbb{Z}^n, \eta \in \mathbb{Z}^n, \zeta \in \mathbb{Z} \}.$$

Es ist Γ_r ein uniform diskretes kokompaktes Gitter in $\text{He}(n)$. Jedes uniform

diskrete kokompakte Gitter in $\text{He}(n)$ ist zu genau einem Γ_r isomorph, vergleiche [GoWi, § 2]. Wir untersuchen die *Heisenberg-Mannigfaltigkeit* $M = \Gamma_r \backslash \text{He}(n)$.

Geometrie von $\text{He}(n)$. Sei $d = (d_1, \dots, d_n)$ ein n -Tupel positiver reeller Zahlen, $T > 0$. Wir betrachten die linksinvariante Metrik auf $\text{He}(n)$, für die $E_{2j-1} = d_j X_j$, $E_{2j} = d_j Y_j$, $j = 1, \dots, n$, und $E_{2n+1} = T^{-1}Z$ eine Orthonormalbasis bilden. Wir setzen $\alpha_j = d_j^2 T$. Dann schreiben sich die einzigen nichttrivialen Kommutatoren wie $[E_{2j-1}, E_{2j}] = \alpha_j E_{2n+1}$. Die üblichen Formeln für linksinvariante Metriken liefern für den *Levi-Civita-*

Zusammenhang

$$\nabla_{2i-1} E_j = \begin{cases} \frac{1}{2} \alpha_i E_{2n+1}, & \text{falls } j = 2i \\ -\frac{1}{2} \alpha_i E_{2i}, & \text{falls } j = 2n+1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\nabla_{2i} E_j = \begin{cases} -\frac{1}{2} \alpha_i E_{2n+1}, & \text{falls } j = 2i-1 \\ \frac{1}{2} \alpha_i E_{2i}, & \text{falls } j = 2n+1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\nabla_{2n+1} E_j = \begin{cases} -\frac{1}{2} \alpha_i E_{2i}, & \text{falls } j = 2i-1 \\ \frac{1}{2} \alpha_i E_{2i-1}, & \text{falls } j = 2i \\ 0, & \text{falls } j = 2n+1 \end{cases}.$$

Die Krümmung läßt sich ebenfalls leicht berechnen; wir bemerken hier nur, daß die *Skalarkrümmung* $S = -\frac{1}{2} \sum \alpha_j^2$ ist.

Die linksinvariante Metrik definiert auch auf dem Quotienten M eine Riemannsche Metrik, für die die lokalen geometrischen Größen natürlich dieselben sind. Wenn wir die Abhängigkeit von den Parametern deutlich machen wollen, schreiben wir für M auch $M(n, r, d, T)$.

Spin-Zusammenhang ∇^Σ und Dirac-Operator D . Wir trivialisieren den Totalraum der Spin-Struktur von $\text{He}(n)$ wie im Beweis von Proposition I.6.3, wobei wir als ON-Basis $E_1, \dots, E_{2n+1}$ nehmen. Das liefert auch eine Trivialisierung des Spinorbündels $\Sigma\text{He}(n)$. Wir schreiben dementsprechend Spinorfelder als Abbildungen $\sigma : \text{He}(n) \rightarrow \Sigma_{2n+1}$. Lemma I.4.1 sagt uns, wie der Spin-Zusammenhang ∇^Σ in dieser Trivialisierung aussieht:

$$\nabla_i^\Sigma = \partial_i - \frac{1}{4} \sum_{jk} \Gamma_{ij}^k E_k E_j.$$

Dabei können wir die E_m als kanonische Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^{2n+1}$ auffassen, die durch Cliffordmultiplikation auf Σ_{2n+1} operieren. In unserem Fall erhalten wir

$$\begin{aligned}\nabla_{2i-1}^\Sigma &= \partial_{2i-1} + \frac{1}{4} \alpha_i E_{2i} E_{2n+1} \\ \nabla_{2i}^\Sigma &= \partial_{2i} - \frac{1}{4} \alpha_i E_{2i-1} E_{2n+1} \\ \nabla_{2n+1}^\Sigma &= \partial_{2n+1} - \frac{1}{4} \sum_j \alpha_j E_{2j-1} E_{2j}.\end{aligned}$$

Für den Dirac-Operator D ergibt sich

$$D = \sum_{k=1}^{2n+1} E_k \partial_k + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \alpha_j E_{2j-1} E_{2j} E_{2n+1}.$$

Spin-Strukturen von M . Gemäß Proposition I.6.3 werden die Spin-Strukturen von M gegeben durch Homomorphismen $\epsilon : \Gamma_r \rightarrow \mathbf{Z}_2$. Da $\mathbf{Z}_2$ abelsch ist, faktorisiert ein solches ϵ über $\Gamma_r / [\Gamma_r, \Gamma_r]$. Ein Kommutator in Γ_r hat die Gestalt $g(O, 0, \xi\eta' - \xi'\eta)$, $\xi, \xi' \in r\mathbf{Z}^n$, $\eta, \eta' \in \mathbf{Z}^n$. Also ist $[\Gamma_r, \Gamma_r] = \{ g(O, 0, r_1\tau) \mid \tau \in \mathbf{Z} \}$. Daher gilt

$$\Gamma_r / [\Gamma_r, \Gamma_r] \cong r\mathbf{Z}^n * \mathbf{Z}^n * \mathbf{Z}_{r_1}.$$

Ein Homomorphismus $\Gamma_r / [\Gamma_r, \Gamma_r] \rightarrow \mathbf{Z}_2$ ist eindeutig festgelegt durch seine Bilder auf den Erzeugern, d.h. durch

$$\begin{aligned}\delta_i &= \epsilon(r_i e_i) && \text{(auf dem ersten Summanden),} \\ \hat{\delta}_i &= \epsilon(e_i) && \text{(auf dem zweiten Summanden),} \\ \tilde{\delta} &= \epsilon([1]_{r_1}) && \text{(auf dem dritten Summanden).}\end{aligned}$$

Dabei schreiben wir $\mathbf{Z}_{r_1} = \{ [0]_{r_1}, \dots, [r_1-1]_{r_1} \}$ und $\mathbf{Z}_2 = \{ 0, 1 \}$ additiv. Ist r_1 ungerade, so muß $\epsilon([1]_{r_1}) = 0$ sein, in diesem Fall besitzt M genau 2^{2n} verschiedene Spin-Strukturen. Ist dagegen r_1 gerade, so kann $\epsilon([1]_{r_1})$ auch gleich 1 gewählt werden. In diesem Fall gibt es auf M genau 2^{2n+1} Spin-Strukturen.

Auf Γ_r sieht der Homomorphismus ϵ nun wie folgt aus:

$$\epsilon(g(\xi, \eta, \zeta)) = \sum_j \delta_j \xi_j / r_j + \sum_j \hat{\delta}_j \eta_j + \tilde{\delta} \zeta$$

oder kurz

$$\epsilon(g(\xi, \eta, \zeta)) = \delta \cdot \xi / r + \hat{\delta} \cdot \eta + \tilde{\delta} \zeta,$$

wobei $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ und $\hat{\delta} = (\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_n)$.

Von jetzt an sei eine Spin-Struktur, d.h. δ , $\hat{\delta}$ und $\tilde{\delta}$, fest vorgegeben. Wir machen keinen Unterschied mehr zwischen den Spinorfeldern bzgl. der gegebenen Spin-Struktur und den ϵ -äquivalenten Abbildungen $\sigma : \text{He}(n) \rightarrow \Sigma_{2n+1}$, d.h. den σ , so daß für alle $\gamma \in \Gamma_r$ und $g \in \text{He}(n)$ gilt

$$\sigma(\gamma g) = (-1)^{\epsilon(\gamma)} \sigma(g).$$

Die rechtsreguläre Darstellung. Für ein L^2 -Spinorfeld $\sigma : \text{He}(n) \rightarrow \Sigma_{2n+1}$ und $g_o \in \text{He}(n)$ definieren wir

$$(R(g_o)\sigma)(g) = \sigma(g g_o).$$

Es ist nicht schwierig zu sehen, daß R eine stetige unitäre Darstellung der Heisenberg-Gruppe $\text{He}(n)$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(M, \Sigma M)$ ist.

Daneben operiert auch die Heisenberg-Algebra $\mathfrak{h}(n)$ auf $\mathcal{H}$, wir können nämlich stetige (insbesondere linksinvariante) Vektorfelder mit L^2 -Spinorfeldern Clifford-multiplizieren und erhalten wieder ein L^2 -Spinorfeld. Wir können uns diese Operation auch so vorstellen, daß wir $\mathfrak{h}(n)$ vermöge einer ON-Basis mit $\mathbb{R}^{2n+1}$ identifizieren und für $X \in \mathfrak{h}(n)$ setzen

$$(X \cdot \sigma)(g) = X \cdot (\sigma(g)).$$

Sei nun $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum, der invariant ist unter R und unter $\mathfrak{he}(n)$, $\sigma \in \mathcal{H}'$ differenzierbar. Für $g \in \text{He}(n)$ sei L_g die Links-translation um g . Für die Ableitung von σ nach einem linksinvarianten Vektorfeld X gilt:

$$\begin{aligned}\partial_X \sigma(g) &= \partial_X (\sigma \circ L_g)(g(0,0,0)) = \\ &= \frac{d}{dt} \sigma \circ L_g (\text{expt} X) \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} (R(\text{expt} X) \sigma)(g) \Big|_{t=0} .\end{aligned}$$

$$\text{Also ist } \partial_X \sigma = \frac{d}{dt} R(\text{expt} X) \sigma \Big|_{t=0} = R_*(X) \sigma .$$

Da $\mathcal{H}'$ abgeschlossen und R -invariant ist, liegt mit σ auch $R_*(X) \sigma$ in $\mathcal{H}'$. Weil $\mathcal{H}'$ auch $\mathfrak{he}(n)$ -invariant ist, ist $\mathcal{H}'$ auch D -invariant, wie man an obiger Formel für den Dirac-Operator ablesen kann. Wir geben diese Formel jetzt noch einmal in einer etwas anderen Form an. Sei dazu $\mathcal{H}'$ isomorph zu $\mathcal{H}'' \otimes \Sigma_{2n+1}$, wobei $\mathcal{H}''$ ein Hilbertraum ist, so daß R wie $\pi \otimes \text{id}$ operiert, wobei π eine unitäre Darstellung von $\text{He}(n)$ auf $\mathcal{H}''$ ist. Es soll $\mathfrak{he}(n)$ nach Identifikation mit $\mathbb{R}^{2n+1}$ durch Cliffordmultiplikation auf dem zweiten Faktor operieren. Dann entspricht dem Dirac-Operator auf den differenzierbaren Vektoren in $\mathcal{H}'' \otimes \Sigma_{2n+1}$ der Operator

$$D = \sum_{k=1}^{2n+1} \pi_*(E_k) \otimes E_k + \frac{1}{4} \text{id} \otimes \sum_{j=1}^n \alpha_j E_{2j-1} E_{2j} E_{2n+1} .$$

Um das Spektrum von D auf M in den Griff zu bekommen, müssen wir also versuchen, $\mathcal{H}$ in möglichst kleine abgeschlossene Unterräume zu zerlegen, die invariant sind unter R und $\mathfrak{he}(n)$. Nach einem Blick in die einschlägige Literatur, etwa [Wal2, Theorem 4.1], nehmen wir den Satz von Stone-von Neumann zur Kenntnis, der uns sagt, wie die irreduziblen

unitären Darstellungen von $\text{He}(n)$ aussehen:

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad f_\tau &: \text{He}(n) \rightarrow \text{U}(1) , \\ f_\tau(g) &= e^{2\pi i \tau(\log(g))} .\end{aligned}$$

Dabei läuft τ über alle Linearformen auf $\mathfrak{he}(n)$, die auf dem Zentrum $\mathfrak{z}_n = \{ X(0,0,z) \}$ verschwinden.

$$\begin{aligned}\text{(ii)} \quad \pi_c &: \text{He}(n) \rightarrow \text{U}(L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})) , \\ [\pi_c(g(x,y,z)) f](u) &= e^{2\pi i c(z+u \cdot y)} f(x+u) ,\end{aligned}$$

wobei $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Jetzt wissen wir, was uns erwartet, und wir können beginnen, $\mathcal{H}$ zu zerlegen.

Zerlegung nach der Operation des Zentrums für $\mathfrak{z} = 0$. Wie sich zeigen wird, ist die wesentliche Fallunterscheidung die nach $\mathfrak{z} = 0$ oder $\mathfrak{z} = 1$. Wir beginnen mit ersterem. Für ein L^2 -Spinorfeld $\sigma : \text{He}(n) \rightarrow \Sigma_{2n+1}$ und für $g \in \text{He}(n)$ betrachten wir die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma_{2n+1} , \quad z \mapsto R(g(0,0,z)) \sigma(g) .$$

Diese Funktion ist periodisch mit Periode 1, denn

$$\begin{aligned}\varphi(z+1) &= \sigma(g \cdot g(0,0,z+1)) = \\ &= \sigma(g \cdot g(0,0,1) \cdot g(0,0,z)) = \\ &= \sigma(g(0,0,1) \cdot g \cdot g(0,0,z)) = \\ &= (-1)^{\mathfrak{z}} \cdot \sigma(g \cdot g(0,0,z)) = \\ &= \varphi(z) .\end{aligned}$$

Die Heisenberg-Mannigfaltigkeit M ist ein S^1 -Prinzipalbündel über dem Torus $T_r^{2n} = \mathbb{R}^{2n}/r \mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{Z}^n$. Die Projektion wird induziert durch den Liegruppen-Homomorphismus $\text{He}(n) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $g(x,y,z) \mapsto (x,y)$. Wir versehen T_r^{2n} mit der Riemannschen Metrik, die diese Projektion zu einer Riemannschen Submersion macht.

Da wir Integrale auf M berechnen können, indem wir zunächst über die

Faser S^1 integrieren und anschließend über den Torus T_r^{2n} , ist, da σ quadratintegrabel ist, für fast alle g auch φ eine L^2 -Funktion auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Wir entwickeln φ in eine Fourier-Reihe:

$$\varphi(z) = \sum_{c \in \mathbb{Z}} \varphi_c(g) \cdot e^{2\pi i c z}.$$

Dabei ist $\varphi_c(g) = \int_0^1 R(g(0,0,t)) \circ(g) e^{-2\pi i c t} dt$. Für $z = 0$ erhalten wir

die Zerlegung $\sigma = \sum_{c \in \mathbb{Z}} \varphi_c$. Damit haben wir eine erste Zerlegung von $\mathcal{H}$ gefunden: $\mathcal{H} = \overline{\bigoplus_{c \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_c} = \mathcal{H}_0 \circ \overline{\bigoplus_{c \in \mathbb{Z}^*} \mathcal{H}_c}$.

Zerlegung von $\mathcal{H}_0$. Sei $\sigma \in \mathcal{H}_0$. Da dann $\sigma(g(x, y, z))$ konstant in z ist, können wir abkürzend $f(x, y) = \sigma(g(x, y, z))$ schreiben. Wir wollen jetzt das genaue Periodizitätsverhalten von f studieren. Auf jeden Fall ist f periodisch bzgl. des Gitters $L_r = 2(r\mathbb{Z}^n \circ \mathbb{Z}^n)$. Wir führen die Fourier-Entwicklung durch:

$$f(x, y) = \sum_{\tau \in L_r^*} a_\tau \cdot e^{2\pi i \tau(x, y)}.$$

Sei $(\xi, \eta) \in r\mathbb{Z}^n \circ \mathbb{Z}^n$. Einerseits gilt

$$f(x + \xi, y + \eta) = \sum_{\tau \in L_r^*} e^{2\pi i \tau(\xi, \eta)} \cdot a_\tau \cdot e^{2\pi i \tau(x, y)}.$$

Andererseits

$$(-1)^{\varepsilon(g(\xi, \eta, 0))} f(x, y) = \sum_{\tau \in L_r^*} e^{\pi i (\delta \xi / r + \hat{\delta} \eta)} \cdot a_\tau \cdot e^{2\pi i \tau(x, y)}.$$

Die Bedingung $f(x + \xi, y + \eta) = (-1)^{\varepsilon(g(\xi, \eta, 0))} f(x, y)$ ist somit äquivalent zu $e^{2\pi i \tau(\xi, \eta)} \cdot a_\tau = e^{\pi i (\delta \xi / r + \hat{\delta} \eta)} \cdot a_\tau$ für alle $\tau \in L_r^*$. Dies ist keine Bedingung an a_τ , falls $2\tau(\xi, \eta) \equiv \xi \delta / r + \eta \hat{\delta} \pmod{2}$, ansonsten muß $a_\tau = 0$ sein.

Wir schreiben $L_r^* = \{ (\tau_1/2r_1, \dots, \tau_n/2r_n, \hat{\tau}_1/2, \dots, \hat{\tau}_n/2) \mid \tau_j, \hat{\tau}_j \in \mathbb{Z} \}$. Die Bedingung $2\tau(\xi, \eta) \equiv \xi \delta / r + \eta \hat{\delta} \pmod{2}$, $(\xi, \eta) \in r\mathbb{Z}^n \circ \mathbb{Z}^n$, bedeutet für die τ_j und $\hat{\tau}_j$:

$$\begin{aligned} \tau_j &\equiv \delta_j \pmod{2} \\ \hat{\tau}_j &\equiv \hat{\delta}_j \pmod{2}. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$L(r, \delta, \hat{\delta}) = \{ (\tau_1/2r_1, \dots, \hat{\tau}_n/2) \mid \tau_j \equiv \delta_j \pmod{2}, \hat{\tau}_j \equiv \hat{\delta}_j \pmod{2} \}.$$

Für f erhalten wir somit die Zerlegung

$$f(x, y) = \sum_{\tau \in L(r, \delta, \hat{\delta})} a_\tau \cdot e^{2\pi i \tau(x, y)}.$$

Fazit: Die rechtsreguläre Darstellung auf $\mathcal{H}_0$ zerlegt sich wie folgt:

$$\mathcal{H}_0 = \overline{\bigoplus_{\tau \in L(r, \delta, \hat{\delta})} \mathcal{H}^\tau}.$$

Jedes $\mathcal{H}^\tau$ ist isomorph zu $\mathbb{C} \otimes \Sigma_{2n+1} \cong \Sigma_{2n+1}$, R operiert wie $f_\tau \otimes \text{id}$, $\mathfrak{h}_\epsilon(n)$ operiert durch Clifford-Multiplikation auf dem zweiten Faktor.

Zerlegung von $\mathcal{H}_c$, $c \neq 0$. Sei $\sigma \in \mathcal{H}_c$. Wir setzen $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \Sigma_{2n+1}$,

$$f(x, y) = \sigma(g(x, y, 0)).$$

Wir können σ folgendermaßen aus f zurückgewinnen:

$$\sigma(g(x, y, z)) = \sigma(g(x, y, 0) \cdot g(0, 0, z)) = e^{2\pi i c z} f(x, y).$$

Wie ist das Periodizitätsverhalten von f ?

Sei $(\xi, \eta) \in r\mathbb{Z}^n \circ \mathbb{Z}^n$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(x + \xi, y + \eta) &= \sigma(g(\xi + x, \eta + y, 0)) = \\ &= \sigma(g(\xi, \eta, 0) \cdot g(x, y, -\xi y)) = \\ &= (-1)^{\varepsilon(g(\xi, \eta, 0))} \cdot e^{-2\pi i c \xi y} \cdot f(x, y) = \\ &= e^{\pi i (\delta \xi / r + \hat{\delta} \eta) - 2\pi i c \xi y} \cdot f(x, y). \end{aligned}$$

Für festes x ist $f(x, \cdot)$ periodisch bzgl. des Gitters $2\mathbb{Z}^n$. Wir entwickeln wieder in eine Fourier-Reihe:

$$f(x, y) = \sum_{\beta \in (1/2)\mathbb{Z}^n} b_\beta(x) \cdot e^{2\pi i \beta y}.$$

Einerseits gilt nun

$$f(x, y + \eta) = \sum_{\beta \in (1/2)\mathbb{Z}^n} b_\beta(x) \cdot e^{2\pi i \beta \eta} \cdot e^{2\pi i \beta y},$$

andererseits

$$(-1)^{\epsilon(g(O, \eta, 0))} \cdot f(x, y) = \sum_{\beta \in (1/2)\mathbb{Z}^n} e^{\pi i \eta \hat{\delta}} \cdot b_\beta(x) \cdot e^{2\pi i \beta y}.$$

Die Bedingung $f(x, y + \eta) = (-1)^{\epsilon(g(O, \eta, 0))} \cdot f(x, y)$ bedeutet somit

$$e^{2\pi i \beta \eta} b_\beta(x) = e^{\pi i \eta \hat{\delta}} \cdot b_\beta(x),$$

$$\text{d.h. } (-1)^{2\beta \eta} b_\beta(x) = (-1)^{\eta \hat{\delta}} b_\beta(x).$$

Dies ist keine Bedingung an b_β , falls $2\beta_j \equiv \hat{\delta}_j \pmod{2}$ für alle j , ansonsten muß $b_\beta = 0$ sein. Also gilt

$$f(x, y) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^n + (1/2)\hat{\delta}} b_\beta(x) \cdot e^{2\pi i \beta y}.$$

Nun untersuchen wir die Periodizität in x . Für $\xi \in r\mathbb{Z}^n$ gilt

$$f(x + \xi, y) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^n + (1/2)\hat{\delta}} b_\beta(x + \xi) \cdot e^{2\pi i \beta y}.$$

Andererseits ist

$$e^{\pi i \xi \hat{\delta} / r} \cdot e^{-2\pi i \xi y} \cdot f(x, y) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^n + (1/2)\hat{\delta}} e^{\pi i \xi \hat{\delta} / r} \cdot b_\beta(x) \cdot e^{2\pi i (\beta - c\xi) y}.$$

Somit ist die Periodizität in x äquivalent zu

$$b_\beta(x + \xi) = e^{\pi i \xi \hat{\delta} / r} \cdot b_{\beta + c\xi}(x).$$

Wir wählen $\beta^{(j)} \in \mathbb{Z}^n + \frac{1}{2}\hat{\delta}$, $j = 1, \dots, N = |c| r_1 \dots r_n$, so daß

$$\{\beta^{(j)} + c\xi \mid j = 1, \dots, N, \xi \in r\mathbb{Z}^n\} = \mathbb{Z}^n + \frac{1}{2}\hat{\delta}.$$

Wir setzen $W_r = [0, r_1] \times \dots \times [0, r_n]$ und $b_j(x) = b_{\beta^{(j)}}(x - \beta^{(j)}/c)$.

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \int_{W_r \times [0, 1]^n} |f(x, y)|^2 dx dy &= \\ &= \int_{W_r} \left\{ \int_{[0, 1]^n} \left| \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^n + (1/2)\hat{\delta}} b_\beta(x) \cdot e^{2\pi i \beta y} \right|^2 dy \right\} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{W_r} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^n + (1/2)\hat{\delta}} |b_\beta(x)|^2 dx = \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{W_r} \sum_{\xi \in r\mathbb{Z}^n} |b_{\beta^{(j)} + c\xi}(x)|^2 dx = \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{W_r} \sum_{\xi \in r\mathbb{Z}^n} |b_{\beta^{(j)}}(x + \xi)|^2 dx = \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} |b_{\beta^{(j)}}(x)|^2 dx = \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} |b_j(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Also sind die b_j genau dann alle quadratintegrabel auf $\mathbb{R}^n$, wenn es f auf $W_r \times [0, 1]^n$ ist, d.h. genau dann, wenn σL^2 ist auf M . Ferner ist die Abbildung $f \mapsto (b_1, \dots, b_N)$ eine Isometrie zwischen dem Unterraum von $L^2(W_r \times [0, 1]^n, \Sigma_{2n+1})$, der $\mathcal{H}_c$ entspricht, und $\bigoplus_{j=1}^N L^2(\mathbb{R}^n, \Sigma_{2n+1})$. Wir haben $\mathcal{H}_c$ also in N Kopien von $L^2(\mathbb{R}^n, \Sigma_{2n+1}) \cong L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \otimes \Sigma_{2n+1}$ zerlegt. Es ist jetzt nicht mehr schwierig nachzuprüfen, daß R auf jeder Kopie wie $\pi_c \otimes \text{id}$ operiert, $\mathfrak{h}_\epsilon(n)$ durch Clifford-Multiplikation auf dem zweiten Faktor.

Ziehen wir eine kurze Zwischenbilanz. Für die Spin-Struktur, die $(\hat{\delta}, \hat{\delta}, 0)$ entspricht, zerfällt R auf $\mathcal{H} = L^2(M, \Sigma M)$ in eine diskrete Summe, in der für jedes $\tau \in L(r, \hat{\delta}, \hat{\delta})$ die Darstellung $f_\tau \otimes \text{id}_\Sigma$ genau einmal vorkommt, die Darstellung $\pi_c \otimes \text{id}_\Sigma$ für jedes $c \in \mathbb{Z}^*$ dagegen genau $|c| r_1 \dots r_n$ mal, $\Sigma = \Sigma_{2n+1}$.

Der Fall $\hat{\delta} = 1$. Auch für $\hat{\delta} = 1$ untersuchen wir zunächst die Operation des Zentrums von $\text{He}(n)$, d.h. wir betrachten die Funktion $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \Sigma_{2n+1}$, $\varphi(z) = R(g(0, 0, z) \circ (g))$. Diesmal erhalten wir $\varphi(z+1) = -\varphi(z)$. Somit ist

φ immerhin periodisch mit Periode 2. Die Fourier-Entwicklung lautet:

$$\varphi(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_k(g) \cdot e^{\pi i k z}.$$

Nun ist einerseits

$$\varphi(z+1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_k(g) \cdot e^{\pi i k (z+1)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{\pi i k} \cdot \varphi_k(g) \cdot e^{\pi i k z}.$$

Andererseits gilt

$$-\varphi(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-\varphi_k(g)) \cdot e^{\pi i k z}.$$

Die Periodizität von φ bedeutet somit, daß für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$-\varphi_k = (-1)^k \varphi_k,$$

d.h. $\varphi_k = 0$ für gerades k und keine Bedingung sonst. Die Fourier-Entwicklung lautet daher

$$\begin{aligned} R(g(O,0,z))\sigma(g) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \varphi_{2l+1}(g) \cdot e^{\pi i (2l+1)z} = \\ &= \sum_{c \in \mathbb{Z}+1/2} \varphi_{2c}(g) \cdot e^{2\pi i c z}. \end{aligned}$$

Die Zerlegung $\sigma = \sum_{c \in \mathbb{Z}+1/2} \varphi_{2c}$ definiert eine Aufspaltung

$$\mathcal{H} = \overline{\bigoplus_{c \in \mathbb{Z}+1/2} \mathcal{H}_c}.$$

Genau wie im Fall $\tilde{\kappa} = 0$ zerlegt sich jedes $\mathcal{H}_c$ in $|c|r_1 \cdots r_n$ Kopien von $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \otimes \Sigma_{2n+1}$, auf denen R wie $\pi_c \otimes \text{id}$ operiert, und $\mathfrak{h}_\epsilon(n)$ durch Clifford-Multiplikation auf dem zweiten Faktor. Man beachte, daß die Multiplizität $|c|r_1 \cdots r_n$ auch hier stets eine ganze Zahl ist, da r_1 gerade sein muß, damit der Fall $\tilde{\kappa} = 1$ auftreten kann.

Realisierung von Σ_{2n+1} . Wie in Abschnitt 1.4 erläutert, realisieren wir Σ_{2n+1} durch $\Delta_{2n+2}^0 \subset \text{Cl}(2n+2)$. Die $E_j \in \text{Cl}(2n+1)$ operieren auf den Elementen von Σ_{2n+1} durch Linksmultiplikation mit E_j . $E_{2n+2} \in \text{Cl}(2n+2)$. Mit dieser Konvention schreibt sich der Dirac-Operator D auf einem abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{H}' \cong \mathcal{H}'' \otimes \Sigma_{2n+1}$, für den R wie $\pi \otimes \text{id}$ operiert, und $\mathfrak{h}_\epsilon(n) \cong \mathbb{R}^{2n+1}$ auf dem zweiten Faktor, wie folgt:

$$D = \sum_{k=1}^{2n+1} \pi_*(E_k) \otimes E_k E_{2n+2} + \frac{1}{4} \text{id} \otimes \sum_{j=1}^n \alpha_j E_{2j-1} E_{2j} E_{2n+1} E_{2n+2}.$$

Bevor wir für π konkrete Darstellungen einsetzen, betrachten wir kurz die Wirkung auf dem zweiten Faktor. Zunächst einige Notationen:

Für ein Tupel $I = (i_1, \dots, i_r)$ und $j \in \{1, \dots, 2n+2\}$ setzen wir

$$\epsilon(j, I) := \begin{cases} 1, & j \in I \\ -1, & j \notin I \end{cases},$$

$$I \& j := \begin{cases} (i_1, \dots, i_k, j, i_{k+1}, \dots, i_r), & \text{falls } i_k < j < i_{k+1} \\ (i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_r), & \text{falls } j = i_k \end{cases},$$

$$\nu(j, I) := \begin{cases} (-1)^k, & \text{falls } i_k < j < i_{k+1} \\ (-1)^k, & \text{falls } j = i_k \end{cases}.$$

Dann gilt:

$$E_{2j} \cdot Z(I) = \nu(j, I) Z(I \& j)$$

$$E_{2j-1} \cdot Z(I) = -\epsilon(j, I) \cdot \nu(j, I) \cdot i \cdot Z(I \& j)$$

$$E_{2j-1} \cdot E_{2j} \cdot Z(I) = -\epsilon(j, I) \cdot i \cdot Z(I).$$

Für solche $Z(I)$, für die das Tupel I gerade Länge hat, gilt:

$$E_{2n+2} \cdot Z(I) = Z(I \& n+1).$$

Eigenwerte auf $\mathcal{H}^\tau$. Für das Differential der Darstellung f_τ auf $\mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} f_{\tau*}(X) \cdot z &= \frac{d}{dt} f_\tau(\exp tX) \cdot z \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} e^{2\pi i t(X)} \cdot z \Big|_{t=0} = \\ &= 2\pi i t(X) \cdot z. \end{aligned}$$

Der Dirac-Operator hat auf $\mathbb{C} \otimes \Sigma_{2n+1}$ somit die Gestalt

$$D = \sum_{j=1}^n \left\{ 2\pi i \tau(E_{2j-1}) \otimes E_{2j-1} \cdot E_{2n+2} + 2\pi i \tau(E_{2j}) \otimes E_{2j} \cdot E_{2n+2} \right\} + \frac{1}{4} \text{id} \otimes \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot E_{2j-1} \cdot E_{2j} \cdot E_{2n+1} \cdot E_{2n+2}.$$

Wir wenden D auf die Basisvektoren $Z(I)$ von $\mathbb{C} \otimes \Sigma_{2n+1}$ an:

$$\begin{aligned} D(1 \otimes Z(I)) &= \\ &= 2\pi i \sum_{j=1}^n \left\{ \tau(E_{2j-1}) \otimes E_{2j-1} \cdot Z(I \& n+1) + \tau(E_{2j}) \otimes E_{2j} \cdot Z(I \& n+1) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{4} \otimes \sum_{j=1}^n \alpha_j \varepsilon(j, I) \cdot \varepsilon(n+1, I) \cdot Z(I) = \\ &= 1 \otimes \sum_{j=1}^n \left\{ 2\pi i d_j \tau(X_j) (-\varepsilon(j, I \& n+1)) \vee(j, I \& n+1) \cdot i \cdot Z(I \& n+1 \& j) + \right. \\ &\quad \left. + 2\pi i d_j \tau(Y_j) \vee(j, I \& n+1) Z(I \& n+1 \& j) - \frac{1}{4} \alpha_j \varepsilon(j, I) \cdot \varepsilon(n+1, I) \cdot Z(I) \right\} = \\ &= 1 \otimes \left(-\frac{1}{4}\right) \sum_{j=1}^n \alpha_j \varepsilon(j, I) \cdot \varepsilon(n+1, I) \cdot Z(I) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^n 1 \otimes 2\pi d_j \vee(j, I) \left(\varepsilon(j, I) \tau(X_j) + i \tau(Y_j) \right) Z(I \& j \& n+1). \end{aligned}$$

Wir schreiben D jetzt als $2^n \times 2^n$ -Matrix $A = A(n, d, T, \tau)$, wobei wir die oben verwendete Basis der $1 \otimes Z(I)$ zugrunde legen und die Tupel I mit $|I|$ gerade als Indizes verwenden.

Dann gilt $A = (A_{IJ})$, wobei

$$A_{IJ} = \begin{cases} -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^n d_j^2 T \varepsilon(j, I) \cdot \varepsilon(n+1, I) & , \text{ falls } I = J \\ 2\pi d_j \vee(j, I) \left(\varepsilon(j, I) \tau(X_j) + i \tau(Y_j) \right) & , \text{ falls } J = I \& j \& n+1 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Es sei $\text{Spec}(n, d, T, \tau)$ das Spektrum der Matrix $A(n, d, T, \tau)$. Es besteht aus 2^n Eigenwerten.

Eigenwerte auf $\mathcal{H}_c$. Der Darstellungsraum $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ besitzt die Basis der Hermite-Funktionen

$$h_k(v) = e^{-|v|^2/2} \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial v_1^{k_1} \dots \partial v_n^{k_n}} e^{-|v|^2},$$

$k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Es gelten die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial v_i} h_k = v_i \cdot h_k + h_{k+e_i},$$

$$h_{k+2e_i} + 2v_i \cdot h_{k+e_i} + 2(k_i+1) h_k = 0.$$

Wir benutzen die L^2 -Basis bestehend aus den $f_k(v) = h_k(\sqrt{2\pi|c|}v)$. Aus obigen Gleichungen erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial v_i} f_k(v) = 2\pi|c| v_i f_k(v) + \sqrt{2\pi|c|} f_{k+e_i}(v),$$

$$f_{k+2e_i}(v) + 2\sqrt{2\pi|c|} v_i f_{k+e_i}(v) + 2(k_i+1) f_k(v) = 0.$$

Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \pi_c(X_j) f(v) &= \frac{d}{ds} \pi_c(\exp s X_j) f(v) \Big|_{s=0} = \\ &= \frac{d}{ds} \pi_c(g(se_j, 0, 0)) f(v) \Big|_{s=0} = \\ &= \frac{d}{ds} e^{2\pi i v \cdot 0} f(v + se_j) \Big|_{s=0} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial v_j}(v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{c*}(Y_j) f(v) &= \frac{d}{ds} \pi_c(g(0, s e_j, 0)) f(v) \Big|_{s=0} = \\
&= \frac{d}{ds} e^{2\pi i c v \cdot s e_j} \cdot f(v) \Big|_{s=0} = \\
&= 2\pi i c v_j f(v) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{c*}(Z) f(v) &= \frac{d}{ds} \pi_c(g(0, 0, s)) f(v) \Big|_{s=0} = \\
&= \frac{d}{ds} e^{2\pi i c s} f(v) \Big|_{s=0} = \\
&= 2\pi i c f(v) .
\end{aligned}$$

Wir wenden den Dirac-Operator auf $f \otimes Z(I) \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \otimes \Sigma_{2n+1}$ an.

$$\begin{aligned}
D(f \otimes Z(I)) &= \\
&= \sum_{j=1}^n \{ d_j \pi_{c*}(X_j) f \otimes E_{2j-1} E_{2n+2} Z(I) + d_j \pi_{c*}(Y_j) f \otimes E_{2j} E_{2n+2} Z(I) \} \\
&+ T^{-1} \pi_{c*}(Z) f \otimes E_{2n+1} E_{2n+2} Z(I) + \frac{1}{4} f \otimes \sum_{j=1}^n \alpha_j E_{2j-1} E_{2j} E_{2n+1} E_{2n+2} Z(I) \\
&= \sum_{j=1}^n \{ d_j \frac{\partial f}{\partial v_j} \otimes (-\epsilon(j, I) v(j, I)) \cdot i \cdot Z(I \& j \& n+1) + \\
&+ d_j \cdot 2\pi i c v_j f \otimes v(j, I) \cdot Z(I \& j \& n+1) \} + 2\pi i c T^{-1} f \otimes (-\epsilon(n+1, I)) i Z(I) \\
&- \frac{1}{4} f \otimes \sum_{j=1}^n \alpha_j \epsilon(j, I) \epsilon(n+1, I) Z(I) = \\
&= \sum_{j=1}^n v(j, I) i d_j \{ 2\pi c v_j f - \epsilon(j, I) \frac{\partial f}{\partial v_j} \} \otimes Z(I \& j \& n+1) + \\
&+ \epsilon(n+1, I) \{ 2\pi c T^{-1} - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \alpha_j \epsilon(j, I) \} f \otimes Z(I) .
\end{aligned}$$

Zur Abkürzung schreiben wir

$$\gamma := \epsilon(n+1, I) \left\{ 2\pi c T^{-1} - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \alpha_j \epsilon(j, I) \right\} .$$

Nun setzen wir für f das Basiselement f_k ein.

$$\begin{aligned}
D(f_k \otimes Z(I)) &= \\
&= \sum_{j=1}^n v(j, I) i d_j \{ 2\pi c v_j f_k - \epsilon(j, I) (2\pi |c| v_j f_k + \sqrt{2\pi |c|} f_{k+e_j}) \} \otimes Z(I \& j \& n+1) \\
&+ \gamma f_k \otimes Z(I) \\
&= \sum_{\substack{j \text{ mit} \\ \epsilon(j, I) \text{sgn}(c)=1}} (-\epsilon(j, I) \cdot v(j, I)) \sqrt{2\pi |c|} d_j i f_{k+e_j} \otimes Z(I \& j \& n+1) + \\
&+ \sum_{\substack{j \text{ mit} \\ \epsilon(j, I) \text{sgn}(c)=-1}} 2(-v(j, I)) i d_j \text{sgn}(c) \sqrt{2\pi |c|} k_j f_{k-e_j} \otimes Z(I \& j \& n+1) + \\
&+ \gamma f_k \otimes Z(I) .
\end{aligned}$$

Falls $k_j = 0$, ist f_{k-e_j} zwar nicht definiert, aber das bekümmert uns nicht weiter, da k_j als Faktor im Koeffizienten vorkommt, dieser dann also sowieso verschwindet.

In der weiteren Rechnung unterscheiden wir nach positivem und negativem c .

1. Fall: $\text{sgn}(c) = 1$.

$$\begin{aligned}
D(f_k \otimes Z(I)) &= \\
&= \sum_{j \in I} -v(j, I) \sqrt{2\pi |c|} d_j i f_{k+e_j} \otimes Z(I \& j \& n+1) + \\
&+ \sum_{j \notin I} -2v(j, I) i d_j \sqrt{2\pi |c|} k_j f_{k-e_j} \otimes Z(I \& j \& n+1) + \gamma f_k \otimes Z(I)
\end{aligned}$$

Wir definieren $W_{k, I} := \begin{cases} f_{k-e_{i_1}-\dots-e_{i_r}} \otimes Z(I) & , \text{ falls } i_r \leq n \\ f_{k-e_{i_1}-\dots-e_{i_{r-1}}} \otimes Z(I) & , \text{ falls } i_r = n+1 \end{cases}$.

Damit $W_{k, I}$ wohldefiniert ist, muß $k_j \geq 1$ sein, falls $j \in I$.

$$\begin{aligned}
DW_{k,I} &= \\
&= \sum_{j \in I} -v(j,I) \sqrt{2\pi|c|} d_j i W_{k,I \& j \& n+1} + \\
&+ \sum_{j \in I} -2v(j,I) i d_j \sqrt{2\pi|c|} k_j W_{k,I \& j \& n+1} + \gamma W_{k,I}.
\end{aligned}$$

Für festes k spannen die $W_{k,I}$ einen D -invarianten Unterraum von $\mathcal{H}_c$ auf. Für $k \geq (1, \dots, 1)$ ist er 2^n -dimensional. Sind $k_{i_1} = \dots = k_{i_s} = 0$, die anderen $k_j > 0$, dann sind nur die I mit $i_1, \dots, i_s \in I$ zulässig. In diesem Fall ist die Dimension des Unterraumes also 2^{n-s} . Die Matrixdarstellung von D auf diesem Unterraum ist gegeben durch $B = B(n, d, T, c, k)$:

$$B_{IJ} := \begin{cases} \varepsilon(n+1, I) \left\{ 2\pi c T^{-1} - \frac{1}{4} T \sum_{j=1}^n d_j^2 \varepsilon(j, I) \right\}, & I = J \\ -v(j, I) \sqrt{2\pi|c|} d_j i, & J = I \& j \& n+1, j \in I \\ -2v(j, I) i d_j \sqrt{2\pi|c|} k_j, & J = I \& j \& n+1, j \in I \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Im Extremfall $k = (0, \dots, 0)$ ist B eine 1×1 -Matrix, denn dann muß $I = J = ()$ sein. Der Eintrag dieser Matrix ist $-\left\{ 2\pi c T^{-1} + \frac{1}{4} T \sum_{j=1}^n d_j^2 \right\}$.

Mit $\text{Spec}(n, d, T, c, k)$ bezeichnen wir das Spektrum der Matrix $B(n, d, T, c, k)$. Es besteht aus 2^{n-s} Eigenwerten, wobei s die Anzahl der Komponenten von k ist, die gleich 0 sind.

2. Fall: $\text{sgn}(c) = -1$.

$$\begin{aligned}
D(f_k \otimes Z(I)) &= \\
&= \sum_{j \in I} v(j, I) \sqrt{2\pi|c|} d_j i f_{k+e_j} \otimes Z(I \& j \& n+1) +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{j \in I} 2v(j, I) i d_j \sqrt{2\pi|c|} k_j f_{k-e_j} \otimes Z(I \& j \& n+1) + \gamma f_k \otimes Z(I).$$

$$\text{Wir setzen } V_{k,I} := \begin{cases} f_{k-(1, \dots, 1)+e_{i_1}+\dots+e_{i_r}} \otimes Z(I), & i_r \leq n \\ f_{k-(1, \dots, 1)+e_{i_1}+\dots+e_{i_{r-1}}} \otimes Z(I), & i_r = n+1 \end{cases}$$

Damit $V_{k,I}$ wohldefiniert ist, $k_j \geq 1$ sein, falls $j \in I$. Es gilt

$$\begin{aligned}
DV_{k,I} &= \sum_{j \in I} 2v(j, I) i d_j \sqrt{2\pi|c|} k_j V_{k,I \& j \& n+1} + \\
&+ \sum_{j \in I} v(j, I) \sqrt{2\pi|c|} d_j i V_{k,I \& j \& n+1} + \gamma V_{k,I}.
\end{aligned}$$

Wieder spannen die $V_{k,I}$ für festes k einen D -invarianten Unterraum auf. Die Matrixdarstellung von D auf diesem Unterraum ist gegeben durch $B = B(n, d, T, c, k)$, wobei

$$B_{IJ} := \begin{cases} \varepsilon(n+1, I) \left\{ 2\pi c T^{-1} - \frac{1}{4} T \sum_{j=1}^n d_j^2 \varepsilon(j, I) \right\}, & I = J \\ v(j, I) \sqrt{2\pi|c|} d_j i, & J = I \& j \& n+1, j \in I \\ 2v(j, I) i d_j \sqrt{2\pi|c|} k_j, & J = I \& j \& n+1, j \in I \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit $\text{Spec}(n, d, T, c, k)$ bezeichnen wir wieder das Spektrum der Matrix $B(n, d, T, c, k)$. Es besteht aus 2^{n-s} Eigenwerten, wobei s die Anzahl der Komponenten von k ist, die verschwinden. Im Extremfall $k = (0, \dots, 0)$ ist nur das Intervall $I = (1, 2, \dots)$ zulässig; die zugehörige 1×1 -Matrix $B(n, d, T, c, 0)$ enthält den Eintrag $(-1)^{n+1} \left\{ 2\pi c T^{-1} - \frac{1}{4} T \sum_{j=1}^n d_j^2 \right\}$.

Dirac-Spektrum von M . Die bisherigen Ergebnisse zusammenfassend erhalten wir:

SATZ 2.1. Auf der Heisenberg-Mannigfaltigkeit $M(n, r, d, T)$ hat der klassische Dirac-Operator D , der zur Spin-Struktur zu (δ, δ, δ) gehört, folgendes Spektrum:

(i) Falls $\delta = 0$:

$$\begin{aligned} \text{Spec}(D) &= \\ &= \bigcup_{\tau \in L(r, \delta, \delta)} \text{Spec}(n, d, T, \tau) \cup \bigcup_{c \in \mathbb{Z}^*} |c| r_1 \cdots r_n \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0^n} \text{Spec}(n, d, T, c, k). \end{aligned}$$

(ii) Falls $\delta = 1$:

$$\text{Spec}(D) = \bigcup_{c \in \mathbb{Z} + 1/2} |c| r_1 \cdots r_n \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0^n} \text{Spec}(n, d, T, c, k).$$

Der Vorfaktor $|c| r_1 \cdots r_n$ bedeutet, daß die Multiplizitäten mit $|c| r_1 \cdots r_n$ zu multiplizieren sind. Es gilt zum Beispiel:

$$\text{Spec}(n, d, T, c, 0) = \begin{cases} - \left\{ 2\pi c T^{-1} + \frac{1}{4} T \sum_{j=1}^n d_j^2 \right\} & , \text{ falls } c > 0 \\ (-1)^{n+1} \left\{ 2\pi c T^{-1} - \frac{1}{4} T \sum_{j=1}^n d_j^2 \right\} & , \text{ falls } c < 0. \blacksquare \end{cases}$$

3-dimensionale Heisenberg-Mannigfaltigkeiten. Wir haben das Spektrum von D auf den Heisenberg-Mannigfaltigkeiten insofern bestimmt, als wir das Problem auf endlich-dimensionale lineare Algebra reduziert haben, nämlich auf die Berechnung der Eigenwerte gewisser Matrizen. Für die folgenden qualitativen Untersuchungen reicht diese Charakterisierung vollständig aus. Dennoch wollen wir vorher wenigstens im Fall $n = 1$ die Eigenwerte spaßeshalber komplett ausrechnen.

a) $\text{Spec}(1, d, T, \tau)$.

Im Fall $n = 1$ sind $I_0 = ()$ und $I_1 = (1, 2)$ die einzigen zulässigen Tupel. Für die Matrix $A = A(1, d, T, \tau)$ schreiben wir $A_{\nu\mu} = A_{I_\nu I_\mu}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} A_{00} &= -\frac{1}{4} d^2 T, \\ A_{11} &= -\frac{1}{4} d^2 T, \end{aligned}$$

$$A_{01} = 2\pi d (-\tau(X) + i\tau(Y)),$$

$$A_{10} = -2\pi d (\tau(X) + i\tau(Y)).$$

Für das charakteristische Polynom p erhalten wir:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \left(-\frac{1}{4} d^2 T - \lambda\right)^2 + 4\pi^2 d^2 (-\tau(X)^2 - \tau(Y)^2) = \\ &= \lambda^2 + \frac{1}{2} d^2 T \lambda + \frac{1}{16} d^4 T^2 - 4\pi^2 d^2 (\tau(X)^2 + \tau(Y)^2) \end{aligned}$$

Die beiden Eigenwerte lauten somit:

$$\begin{aligned} \lambda^\pm(d, T, \tau) &= \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2} d^2 T \pm \sqrt{\frac{1}{4} d^4 T^2 - 4 \left[\frac{1}{16} d^4 T^2 - 4\pi^2 d^2 (\tau(X)^2 + \tau(Y)^2) \right]} \right\} \\ &= -\frac{1}{4} d^2 T \pm 2\pi d \sqrt{\tau(X)^2 + \tau(Y)^2}. \end{aligned}$$

b) $\text{Spec}(1, d, T, c, k)$ für $c > 0$ und $k \geq 1$.

Für die Matrix $B = B(1, d, T, c, k)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} B_{00} &= - \left\{ 2\pi c T^{-1} + \frac{1}{4} T d^2 \right\}, \\ B_{11} &= 2\pi c T^{-1} - \frac{1}{4} T d^2, \\ B_{01} &= -2\sqrt{2\pi|c|} d k i, \\ B_{10} &= \sqrt{2\pi|c|} d i. \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom p lautet:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \left\{ -2\pi c T^{-1} - \frac{1}{4} T d^2 - \lambda \right\} \left\{ 2\pi c T^{-1} - \frac{1}{4} T d^2 - \lambda \right\} - 4\pi c d^2 k = \\ &= \lambda^2 + \frac{1}{2} T d^2 \lambda - 4\pi^2 c^2 T^{-2} + \frac{1}{16} T^2 d^4 - 4\pi c d^2 k. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind somit:

$$\begin{aligned} \lambda^\pm(d, T, c, k) &= \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2} T d^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} T^2 d^4 - 4 \left\{ -4\pi^2 c^2 T^{-2} + \frac{1}{16} T^2 d^4 - 4\pi c d^2 k \right\}} \right\} \\ &= -\frac{1}{4} T d^2 \pm 2 \sqrt{\pi^2 c^2 T^{-2} + \pi c d^2 k}. \end{aligned}$$

c) $\text{Spec}(d, T, c, k)$ für $c < 0$ und $k \geq 1$.

Zunächst wieder die Matrix $B = B(1, d, T, c, k)$:

$$B_{00} = - \left\{ 2\pi c T^{-1} + \frac{1}{4} T d^2 \right\} ,$$

$$B_{11} = 2\pi c T^{-1} - \frac{1}{4} T d^2 ,$$

$$B_{10} = -2\sqrt{2\pi|c|} d k i ,$$

$$B_{01} = \sqrt{2\pi|c|} d i .$$

Für die Eigenwerte erhalten wir:

$$\lambda^*(d, T, c, k) = -\frac{1}{4} T d^2 \pm 2 \sqrt{\pi^2 c^2 T^{-2} + \pi|c| d^2 k} .$$

Wir fassen zusammen:

SATZ 2.2. Auf den dreidimensionalen Heisenberg-Mannigfaltigkeiten

$M(1, r, d, T)$ hat der klassische Dirac-Operator D zur Spin-Struktur zu (δ, δ, ξ)

die folgenden Eigenwerte:

(i) Falls $\xi = 0$:

$$a) \lambda^*(d, T, \tau) = -\frac{1}{4} d^2 T \pm 2\pi d \sqrt{\tau(X)^2 + \tau(Y)^2} ,$$

jeweils mit Multiplizität 1, $\tau \in L(r, \delta, \xi)$.

$$b) \lambda(d, T, c, 0) = - \left\{ 2\pi|c| T^{-1} + \frac{1}{4} T d^2 \right\} ,$$

mit Multiplizität $|c|r$, $c \in \mathbb{Z}^*$.

$$c) \lambda^*(d, T, c, k) = -\frac{1}{4} T d^2 \pm 2 \sqrt{\pi^2 c^2 T^{-2} + \pi|c| d^2 k} ,$$

jeweils mit Multiplizität $|c|r$, $c \in \mathbb{Z}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$.

(ii) Falls $\xi = 1$:

$$a) \lambda(d, T, c, 0) = - \left\{ 2\pi|c| T^{-1} + \frac{1}{4} T d^2 \right\} ,$$

mit Multiplizität $|c|r$, $c \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$.

$$b) \lambda^*(d, T, c, k) = -\frac{1}{4} T d^2 \pm 2 \sqrt{\pi^2 c^2 T^{-2} + \pi|c| d^2 k} ,$$

jeweils mit Multiplizität $|c|r$, $c \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{N}^*$.■

Harmonische Spinorfelder. Wir kehren nun zu allgemeinem $n \geq 1$ zurück und wollen einsehen, daß wir durch geeignete Wahl der Riemannschen Metrik beliebig viele harmonische Spinorfelder erzeugen können. Dazu betrachten wir für $k = (1, 0, \dots, 0)$ und $c \in \mathbb{N}^*$ oder $c \in \mathbb{N}_0 + \frac{1}{2}$ die 2×2 -Matrix $B = B(n, d, T, c, k)$. Die zulässigen Tupel sind hier $I_0 = ()$ und $I_1 = (1, n+1)$.

$$B_{00} = - \left\{ 2\pi c T^{-1} + \frac{1}{4} T \sum_{j=1}^n d_j^2 \right\} ,$$

$$B_{11} = 2\pi c T^{-1} - \frac{1}{4} T \left[d_1^2 - \sum_{j=2}^n d_j^2 \right] ,$$

$$B_{01} = -2\sqrt{2\pi|c|} k_1 d_1 i ,$$

$$B_{10} = \sqrt{2\pi|c|} d_1 i .$$

Für die Determinante von B erhalten wir:

$$\det B = -4\pi^2 c^2 T^{-2} + \dots + \frac{1}{16} T^2 \left[d_1^2 - \sum_{j=2}^n d_j^2 \right] \sum_{j=1}^n d_j^2 .$$

Wir wählen d so, daß $d_1^2 - \sum_{j=2}^n d_j^2 > 0$ ist. Für $n = 1$ ist das automatisch der Fall. Es gilt

$$\det B \rightarrow -\infty \text{ für } T \rightarrow 0 ,$$

$$\det B \rightarrow +\infty \text{ für } T \rightarrow \infty .$$

Also gibt es ein T , so daß $B(n, d, T, c, k)$ den Eigenwert 0 hat. Der Raum der harmonischen Spinorfelder hat dann mindestens die Dimension $|c|r_1 \cdots r_n$. Indem wir c groß machen erhalten wir beliebig viele harmonische Spinorfelder.

SATZ 2.3. Zu jeder Schranke C gibt es auf jeder Heisenberg-Mannigfaltigkeit $\Gamma_r \setminus \text{He}(n)$ eine Riemannsche Metrik, so daß der Kern des klassischen Dirac-Operators zu jeder Spin-Struktur mindestens C -dimensional ist.■

Isospektralität. Für eine Spin-Struktur mit $\mathfrak{s} = 1$ hängen die Eigenwerte überhaupt nicht von r ab, lediglich die Multiplizitäten $|c|r_1 \cdots r_n$ hängen vom Produkt $r_1 \cdots r_n$ ab. Für $n \geq 2$ können wir stets zwei Tupel r und s finden mit $r \neq s$, aber $r_1 \cdots r_n = s_1 \cdots s_n$, r_1 und s_1 gerade. Die zugehörigen Heisenberg-Mannigfaltigkeiten $M(n, r, d, T)$ und $M(n, s, d, T)$, d und T beliebig, sind dann nicht homotopieäquivalent, haben aber dasselbe Spektrum.

SATZ 2.4. *In allen ungeraden Dimensionen ≥ 5 gibt es Heisenberg-Mannigfaltigkeiten, die für gewisse Spin-Strukturen dasselbe Dirac-Spektrum haben, die aber nicht isomorphe Fundamentalgruppen haben, also nicht homotopieäquivalent sind. ■*

Kollaps. Für $T \rightarrow 0$ kollabiert die Heisenberg-Mannigfaltigkeit $M(n, r, d, T)$ gegen den Torus T_r^{2n} . Die Matrizen $A(n, d, T, \tau)$ konvergieren gegen die Matrixdarstellung des Dirac-Operators auf T_r^{2n} auf dem Summanden von $L^2(T_r^{2n}, \Sigma T_r^{2n})$, auf dem die rechtsreguläre Darstellung von T_r^{2n} wie die Translation um τ , tensoriert mit id_Σ , operiert. Also konvergiert das Teilspektrum $\bigcup_{\tau \in L(r, \delta, \mathfrak{s})} \text{Spec}(n, d, T, \tau)$ gegen das Dirac-Spektrum von T_r^{2n} zur Spin-Struktur zu $(\delta, \mathfrak{s})$.

Die Eigenwerte der Matrizen $B(n, d, T, c, k)$ dagegen streben nach $\pm\infty$, denn $T \cdot B(n, d, T, c, k)$ konvergiert gegen eine Diagonalmatrix mit den nicht verschwindenden Diagonaleinträgen $\pm 2\pi c$.

SATZ 2.5. *Für die Spin-Struktur zu $(\delta, \mathfrak{s}, 0)$ konvergiert das Teilspektrum $\bigcup_{\tau \in L(r, \delta, \mathfrak{s})} \text{Spec}(n, d, T, \tau)$ gegen das Dirac-Spektrum auf T_r^{2n} zur Spin-Struktur zu $(\delta, \mathfrak{s})$. Die anderen Eigenwerte konvergieren gegen $\pm\infty$.*

Für die Spin-Struktur zu $(\delta, \mathfrak{s}, 1)$ konvergieren alle Eigenwerte gegen $\pm\infty$. ■

3. RUNDE SPHÄREN

Das Spektrum des klassischen Dirac-Operators auf einer runden Sphäre $M = S^n$ läßt sich nach dem Programm aus Abschnitt 1.5 mittels Frobenius-Reziprozität berechnen, wobei man $S^n = \text{Spin}(n+1)/\text{Spin}(n)$ schreibt. Das wurde auch tatsächlich durchgeführt, siehe [Sul1]. In diesem Fall gibt es allerdings eine wesentlich einfachere Möglichkeit, das Spektrum auszurechnen.

Wir normieren so, daß die Schnittkrümmung K von S^n , $n \geq 2$, konstant gleich 1 ist. Sei D der klassische Dirac-Operator, ∇^Σ der Spin-Zusammenhang. Wir setzen $\mu = 1/2$ oder $\mu = -1/2$. Proposition 1.7.2 besagt, daß das Spinorbündel ΣS^n durch Killing-Spinoren ψ_j , $j = 1, \dots, 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$, zu $-\mu$ trivialisiert werden kann. Für den modifizierten Zusammenhang $\tilde{\nabla}$ aus Proposition 1.2.8, $\tilde{\nabla}_X \psi = \nabla_X^\Sigma \psi + \mu \cdot X \cdot \psi$, gilt also

$$\tilde{\nabla} \psi_j = 0.$$

Die Eigenwerte des Laplace-Beltrami-Operators $\Delta_\circ$ für Funktionen auf S^n sind $k(n+k-1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, mit der Multiplizität

$$m_k = \binom{n+k-1}{k} \frac{n+2k-1}{n+k-1}.$$

Zum Beweis siehe [BGM, S. 159ff].

Sei $f_0 \equiv 1$, $f_1, f_2, \dots$ eine Orthonormalbasis von $L^2(S^n, \mathbb{R})$ aus Eigenfunktionen von $\Delta_\circ$, $\Delta_\circ f_i = \lambda_i f_i$. Die $f_i \cdot \psi_j$ bilden eine Basis von $L^2(S^n, \Sigma S^n)$.

$$\begin{aligned} \text{Proposition 1.2.8 besagt } (D - \mu)^2 &= \tilde{\nabla}^* \tilde{\nabla} + S/4 - (n-1)\mu^2 = \\ &= \tilde{\nabla}^* \tilde{\nabla} + \mu^2 \cdot n(n-1) - \mu^2(n-1) = \\ &= \tilde{\nabla}^* \tilde{\nabla} + \mu^2(n-1)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sei } p \in S^n. \text{ Bezüglich eines um } p \text{ synchronen Rahmens berechnen wir} \\ \text{in } p: (D - \mu)^2(f_i \psi_j) &= - \sum \tilde{\nabla}_k \tilde{\nabla}_k (f_i \psi_j) + \mu^2(n-1)^2 f_i \psi_j = \\ &= - \sum \tilde{\nabla}_k (\partial_k f_i \cdot \psi_j) + \mu^2(n-1)^2 f_i \psi_j = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_k \partial_k^2 f_i \cdot \psi_j + \mu^2 (n-1)^2 f_i \psi_j = \\
&= \Delta_0 f_i \cdot \psi_j + \mu^2 (n-1)^2 f_i \psi_j = \\
&= (\lambda_i + \mu^2 (n-1)^2) f_i \psi_j.
\end{aligned}$$

Damit haben wir das Spektrum von $(D - \mu)^2$ bestimmt. Die Eigenwerte sind $k(n+k-1) + \frac{1}{4}(n-1)^2$ mit der Multiplizität $2^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot m_k$.

Als nächstes berechnen wir die Eigenwerte von $D - \mu$. Zunächst eine allgemeine Vorbemerkung. Gilt für einen Operator A und einen Vektor u

$$A^2 u = v^2 u,$$

dann gilt für $v^* := \pm v u + A u$:

$$A v^* = \pm v A u + v^2 u = \pm v (A u \pm v u) = \pm v v^*.$$

Falls also $v^* \neq 0$, dann ist $\pm v$ ein Eigenwert von A .

In unserem Fall ist $A = D - \mu$. Betrachten wir zunächst den Fall $k = 0$, d.h. $u = \psi_j$ und $v = \mu(n-1)$.

$$\begin{aligned}
v^+ &= \mu(n-1) \psi_j + (D - \mu) \psi_j = \\
&= \mu(n-2) \psi_j + \sum E_i \cdot \nabla_i^\Sigma \psi_j = \\
&= \mu(n-2) \psi_j + \sum E_i \cdot (-\mu E_i) \psi_j = \\
&= 2\mu(n-1) \psi_j.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ linear unabhängige Eigenvektoren von $A = D - \mu$ zum Eigenwert $\mu(n-1)$. Somit ist $\mu(n-1)$ Eigenwert von $D - \mu$ mit Multiplizität $\geq 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Da der Eigenwert $\mu^2(n-1)^2$ von $(D - \mu)^2$ die Multiplizität $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ hat, ist die Vielfachheit von $\mu(n-1)$ für $D - \mu$ ebenfalls genau $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Jetzt zum Fall $k \geq 1$, d.h. $u = f_i \psi_j$, $i \geq 1$. Für v gilt dann:

$$\begin{aligned}
v &= \left\{ k(n+k-1) + \mu^2(n-1)^2 \right\}^{1/2} = \\
&= \left\{ k^2 + 2k \frac{n-1}{2} + \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 \right\}^{1/2} = \\
&= k + \frac{n-1}{2}.
\end{aligned}$$

Wir haben die Eigenwerte von $D - \mu$ bestimmt, nämlich $\mu(n-1)$ und $\pm(k + \frac{n-1}{2})$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Nun kennen wir auch die Eigenwerte von D : μn und $\mu \pm(k + \frac{n-1}{2})$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Die Multiplizität von

μn ist $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$, die anderen Multiplizitäten kennen wir noch nicht. Für den Moment lassen wir auch die Multiplizität 0 zu.

Um die Multiplizitäten zu bestimmen, erinnern wir uns daran, daß wir $\mu = +\frac{1}{2}$ oder $\mu = -\frac{1}{2}$ wählen können. Betrachten wir zunächst den Fall $\mu = +\frac{1}{2}$.

Für das Spektrum von D erhalten wir $\text{Spec}(D) = \{ \lambda_k^+ \mid k \in \mathbb{Z} \}$, wobei

$$\lambda_{-k}^+ = 1 - n/2 - k, \quad k \geq 1, \quad \lambda_0^+ = n/2, \quad \lambda_k^+ = n/2 + k, \quad k \geq 1.$$

Die einzige Multiplizität, die wir kennen, ist $m(n/2) = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Nun zum Fall $\mu = -\frac{1}{2}$. Hier erhalten wir $\text{Spec}(D) = \{ \lambda_k^- \mid k \in \mathbb{Z} \}$, wobei

$$\lambda_{-k}^- = -n/2 - k, \quad k \geq 1, \quad \lambda_0^- = -n/2, \quad \lambda_k^- = -1 + n/2 + k, \quad k \geq 1.$$

Ferner wissen wir, daß $m(-n/2) = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

$m(\lambda_k^+) + m(\lambda_{-k}^-)$ ist die Multiplizität des k -ten Eigenwertes von $(D - 1/2)^2$, also $2^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot m_k$. Analog ergibt sich $m(\lambda_k^-) + m(\lambda_{-k}^+) = 2^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot m_k$. Jetzt können wir die restlichen Multiplizitäten ausrechnen.

$$\text{LEMMA 3.1. } m(\lambda_k^+) = m(\lambda_{-k}^-) = 2^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot \binom{k+n-1}{k} \quad (k \geq 0).$$

BEWEIS durch Induktion über k . Für den Induktionsanfang ($k = 0$) benötigen wir gerade die beiden Multiplizitäten, die wir schon kennen. Zum Induktionsschritt ($k \rightarrow k+1$):

$$\begin{aligned}
m(\lambda_{k+1}^+) &= 2^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot m_{k+1} - m(\lambda_{-k-1}^-) = \\
&= 2^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot m_{k+1} - m(\lambda_{-k}^-) = \\
&= 2^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot m_{k+1} - 2^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot \binom{k+n-1}{k} = \\
&= 2^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot \left\{ \binom{n+k}{k-1} \frac{n+2k+1}{n+k} - \binom{k+n-1}{k} \right\} = \\
&= 2^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot \binom{n+k}{k+1}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Fassen wir zusammen:

SATZ 3.2. Die runde Sphäre S^n , $n \geq 2$, mit Krümmung $K = 1$ hat

$$\pm (n/2 + k), \quad k \geq 0,$$

als klassische Dirac-Eigenwerte, jeweils mit der Multiplizität

$$2^{[n/2]} \cdot \binom{k+n-1}{k}. \blacksquare$$

4. QUOTIENTEN VON SPHÄREN

Wir wollen in diesem Abschnitt die kompakten Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung 1, d.h. die Quotienten von Sphären, studieren. Da die einzigen nichttrivialen geradedimensionalen Quotienten die projektiven Räume sind, und diese dann nicht orientierbar und daher auch nicht Spin sind, müssen wir nur die Quotienten von S^{2n-1} untersuchen.

Sei $\Gamma \subset \text{Iso}^+(S^{2n-1}) = \text{SO}(2n)$ eine endliche fixpunktfreie Untergruppe. Einer Spin-Struktur auf $M = \Gamma \backslash S^{2n-1}$ entspricht ein Homomorphismus $\epsilon : \Gamma \rightarrow \text{Spin}(2n)$ mit $\theta \cdot \epsilon = \text{id}_\Gamma$. Die Spinorfelder ψ von S^{2n-1} entsprechen $\text{Spin}(2n-1)$ -äquvarianten Abbildungen $\tilde{\psi} : \text{Spin}(2n) \rightarrow \Sigma_{2n-1}$. Es operiert $\text{Spin}(2n)$ von links auf den Spinorfeldern durch

$$(g \circ \tilde{\psi})(g) = \tilde{\psi}(g \circ^{-1} g).$$

Der Totalraum der Spin-Struktur von M ist gegeben durch $_{\epsilon(\Gamma)} \backslash \text{Spin}(2n)$, also entsprechen die Spinorfelder von M den $_{\epsilon(\Gamma)}$ -invarianten Spinorfeldern von S^{2n-1} .

Die D -Eigenwerte von S^N , $N = 2n-1$, und daher auch die von M , haben alle die Form $\pm(N/2 + k)$, $k \geq 0$. Die Frage ist nur, wie die Multiplizitäten $m(\pm(N/2 + k), D)$ auf M lauten. Um dies aufzuhellen, betrachten wir die Poincaré-Reihen $F_+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} m(N/2 + k, D) z^k$,

$$F_-(z) = \sum_{k=0}^{\infty} m(-(N/2 + k), D) z^k.$$

Wir kennen das D -Spektrum von M somit genau dann, wenn wir F_+ und F_- kennen.

Die Spin-Darstellung ρ von $\text{Spin}(2n)$ auf $\Sigma_{2n} = \Delta_{2n}^{\mathbb{C}}$ zerfällt in die (irreduziblen) Halb-Spin-Darstellungen

$$\rho^+ : \text{Spin}(2n) \rightarrow \text{Aut}(\Delta_{2n}^0),$$

$$\rho^- : \text{Spin}(2n) \rightarrow \text{Aut}(\Delta_{2n}^1).$$

Wir realisieren Σ_N durch Δ_{2n}^0 und identifizieren Δ_{2n}^1 mit Σ_N durch $\Delta_{2n}^1 \rightarrow \Delta_{2n}^0$, $Z \rightarrow E_{2n} \cdot Z$. Jetzt haben ρ^+ und ρ^- beide Σ_N als Darstellungsraum. Für das Differential der Halb-Spin-Darstellungen gilt:

$$\begin{aligned}\rho^*|_{\mathfrak{spin}(N)} &= \rho^{\text{Spin}(N)}_* , \\ \rho^*(E_i E_{2n}) &= \pm E_i .\end{aligned}$$

($1 \leq i \leq N$, Cliffordmultiplikation von $\text{Cl}(N)$ auf Σ_N).

Sei $\chi_{\pm}$ der Charakter von $\rho^{\pm}$. Jetzt können wir die Poincaré-Reihen angeben.

$$\begin{aligned}\text{SATZ 4.1. } F_+(z) &= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{\chi_-(\epsilon\gamma) - z \chi_+(\epsilon\gamma)}{\det(1 - \gamma z)} , \\ F_-(z) &= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{\chi_+(\epsilon\gamma) - z \chi_-(\epsilon\gamma)}{\det(1 - \gamma z)} .\end{aligned}$$

Bevor wir zum Beweis kommen, wollen wir zwei Folgerungen aus diesen Formeln ableiten. Ikeda bemerkt in [Ik1, Cor. 2.4], daß falls zwei solche Raumformen Δ_0 -isospektral sind, die Fundamentalgruppen dieselbe Ordnung haben müssen. Das ist allerdings sowieso klar, da das Volumen einer Riemannschen Mannigfaltigkeit eine Spektralinvariante ist. Für den klassischen Dirac-Operator dagegen liefert Ikedas Argument etwas mehr.

KOROLLAR 4.2. *Stimmen für $\Gamma_1 \backslash S^{2n-1}$ und $\Gamma_2 \backslash S^{2n-1}$ das positive oder das negative D -Spektrum überein, so gilt*

$$|\Gamma_1| = |\Gamma_2| .$$

BEWEIS: F_+ hat in $z=1$ einen Pol der Ordnung N und es gilt

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1-z)^N F_+(z) = (2^{\frac{n-1}{2}}) / |\Gamma| .$$

Für F_- ist das Argument dasselbe. ■

KOROLLAR 4.3. *Seien Γ_1 und Γ_2 zwei endliche fixpunktfreie Untergruppen von $\text{SO}(2n)$, $\epsilon_i : \Gamma_i \rightarrow \text{Spin}(2n)$ Homomorphismen mit $\Theta \cdot \epsilon_i = \text{id}_{\Gamma_i}$. Falls es eine bijektive Abbildung $\Phi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ gibt, so daß für alle $\gamma \in \Gamma_1$ $\epsilon_2(\Phi(\gamma))$ in $\text{Spin}(2n)$ konjugiert ist zu $\epsilon_1(\gamma)$, dann sind $\Gamma_1 \backslash S^{2n-1}$ und $\Gamma_2 \backslash S^{2n-1}$ D -isospektral.*

BEWEIS: χ_+ und χ_- sind invariant unter Konjugation in $\text{Spin}(2n)$. Ferner sind γ und $\Phi(\gamma)$ konjugiert in $\text{SO}(2n)$, und $\det(1 - \gamma z)$ ist invariant unter Konjugation in $\text{SO}(2n)$. ■

Nun zum BEWEIS von Satz 4.1: Wie im dritten Abschnitt betrachten wir auch hier zunächst die Operatoren $(D \pm 1/2)^2$ und ihre zugehörigen Poincaré-Reihen $G_{\pm}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} m((\frac{N-1}{2} + k)^2, (D \pm 1/2)^2) z^k$.

Auf S^N ist der Eigenraum E^k von $(D + 1/2)^2$ zum Eigenwert $(\frac{N-1}{2} + k)^2$ aufgespannt durch die $f \cdot \Psi$, wobei Ψ ein Killingspinor zur Killingzahl $1/2$ ist, und $f \in \mathcal{H}^k = \{ \text{harmonische homogene Polynome vom Grad } k \text{ auf } \mathbb{C}^{2n} \}$.

Wie bereits erwähnt, operiert $\text{Spin}(2n)$ auf den Spinorfeldern von S^N . Es läßt $\text{Spin}(2n)$ die Eigenräume E^k invariant. Diese Darstellung von $\text{Spin}(2n)$ auf E^k interessiert uns, denn die Dimension des $\epsilon(\Gamma)$ -invarianten Unterraumes von E^k ist die Multiplizität $m((\frac{N-1}{2} + k)^2, (D + 1/2)^2)$.

Wie operiert $\text{Spin}(2n)$ auf den $(1/2)$ -Killingspinoren?

Die Killingspinoren zu $1/2$ sind gegeben durch $\tilde{\Psi}(g) = \rho^+(g^{-1}) \cdot \sigma$, $\sigma = \tilde{\Psi}(1) \in \Sigma_N$, siehe [CGLS, Prop. 12]. Nun gilt:

$$(g_o \tilde{\Psi})(g) = \tilde{\Psi}(g_o^{-1} g) = \rho^+(g^{-1} g_o) \cdot \sigma = \rho^+(g^{-1}) \rho^+(g_o) \sigma .$$

Wenn wir den Killingspinor $\tilde{\Psi}$ mit seinem Wert σ in 1 identifizieren, dann operiert $\text{Spin}(2n)$ genau wie ρ^+ .

Sei ρ_k die Darstellung von $\text{SO}(2n)$ auf $\mathcal{H}^k$, χ_k ihr Charakter. Wir haben

soeben gesehen, daß die Darstellung von $\text{Spin}(2n)$ auf E^k äquivalent ist zur Darstellung $(\rho_k \cdot \Theta) \otimes \rho^*$ auf $\mathcal{H}^k \otimes \Sigma_N$. Die Dimension des $\epsilon(\Gamma)$ -invarianten Unterraumes ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \dim(E^k)_{\epsilon(\Gamma)} &= (\chi_k \cdot \chi_{\rho^* \cdot \epsilon}, 1) = \\ &= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_k(\gamma) \chi_+(\epsilon(\gamma)) . \end{aligned}$$

Ikeda hat in [Ik1, Seite 81] berechnet, daß

$$\sum_{k=0}^{\infty} \chi_k(\gamma) z^k = \frac{1-z^2}{\det(1-\gamma z)} .$$

Also erhalten wir:

$$\begin{aligned} G_+(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_k(\gamma) \chi_+(\epsilon(\gamma)) z^k = \\ &= \frac{1-z^2}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{\chi_+(\epsilon\gamma)}{\det(1-\gamma z)} . \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$G_-(z) = \frac{1-z^2}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{\chi_-(\epsilon\gamma)}{\det(1-\gamma z)} .$$

Genau wie bei der Berechnung des Spektrums der runden Sphären erhalten wir

$$m(N/2 + k, D) + m(-N/2 - k + 1, D) = m((N/2 + k)^2, (D - 1/2)^2) .$$

Für unsere Poincaré-Reihen heißt das

$$F_+(z) + z F_-(z) = G_-(z) .$$

Genauso sieht man

$$z F_+(z) + F_-(z) = G_+(z) .$$

Jetzt müssen diese Gleichungen nur noch nach F_+ und F_- aufgelöst werden. ■

5. LINSENÄUME

Die Ergebnisse aus dem vorangegangenen Abschnitt wollen wir nun für die Linsenräume noch etwas konkreter machen. Zunächst einige Notationen. Für $\Theta \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$R(\Theta) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\Theta) & -\sin(2\pi\Theta) \\ \sin(2\pi\Theta) & \cos(2\pi\Theta) \end{pmatrix} .$$

Sei $\Gamma \subset \text{Iso}^+(\mathbb{S}^{2n-1})$ die von

$$R(p_1/q, \dots, p_n/q) = \left[\begin{array}{cc} R(p_1/q) & \circ \\ \circ & R(p_n/q) \end{array} \right]$$

erzeugte zyklische Untergruppe, wobei $p_1, \dots, p_n$ und q natürliche Zahlen sind, so daß p_j und q für alle j teilerfremd sind. Dann ist Γ isomorph zu $\mathbb{Z}_q$. Wir wollen das Dirac-Spektrum des *Linsenraumes* $L(q; p_1, \dots, p_n) = \Gamma \backslash \mathbb{S}^{2n-1}$ untersuchen.

Maximaler Torus von $\text{Spin}(2n)$. Wir erinnern uns daran, daß $\text{Spin}(2n)$ in $\text{Cl}(2n)^\circ$ enthalten ist, und definieren

$$\begin{aligned} g(\Theta_1, \dots, \Theta_n) &= \\ &= (\cos(2\pi\Theta_1) + \sin(2\pi\Theta_1)E_1E_2) \cdots (\cos(2\pi\Theta_n) + \sin(2\pi\Theta_n)E_{2n-1}E_{2n}) . \end{aligned}$$

Die Elemente $g(\Theta_1, \dots, \Theta_n)$ bilden einen maximalen Torus in $\text{Spin}(2n)$, der den Standard-maximalen Torus von $\text{SO}(2n)$ überlagert, denn

$$\Theta(g(\Theta_1, \dots, \Theta_n)) = R(2\Theta_1, \dots, 2\Theta_n) .$$

Wir berechnen jetzt die Charaktere $\chi_\pm$ der Halb-Spin-Darstellungen ρ^* auf diesem maximalen Torus. Wie wir bereits festgestellt haben, gilt

$$E_{2j-1} \cdot E_{2j} \cdot Z(I) = \begin{cases} i \cdot Z(I), & \text{falls } j \in I \\ -i \cdot Z(I), & \text{falls } j \notin I \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Daher gilt} \quad & g(\theta_1, \dots, \theta_n) \cdot Z(I) = \\ & = e^{-2\pi i \theta_{i_1}} \cdot \dots \cdot e^{-2\pi i \theta_{i_r}} \cdot e^{2\pi i \theta_{j_1}} \cdot \dots \cdot e^{2\pi i \theta_{j_{n-r}}} \cdot Z(I) = \\ & = e^{2\pi i (\theta_{j_1} + \dots + \theta_{j_{n-r}} - \theta_{i_1} - \dots - \theta_{i_r})} \cdot Z(I), \end{aligned}$$

wobei $J = (j_1, \dots, j_{n-r})$ das zu $I = (i_1, \dots, i_r)$ komplementäre Tupel ist. Da der Darstellungsraum von ρ^* von den $Z(I)$ aufgespannt wird, für die $|I| + n$ gerade ist, gilt für die Spur

$$\chi_+(g(\theta_1, \dots, \theta_n)) = \sum_{\substack{\epsilon_j \in \{\pm 1\} \\ \epsilon_1 \cdot \dots \cdot \epsilon_n = (-1)^n}} e^{2\pi i \sum \epsilon_j \theta_j}.$$

Analog erhalten wir

$$\chi_-(g(\theta_1, \dots, \theta_n)) = \sum_{\substack{\epsilon_j \in \{\pm 1\} \\ \epsilon_1 \cdot \dots \cdot \epsilon_n = (-1)^{n+1}}} e^{2\pi i \sum \epsilon_j \theta_j}.$$

Die Gruppe $\Gamma' = \Theta^{-1}(\Gamma)$. Um die Spin-Strukturen der Linsenräume in den Griff zu bekommen, müssen wir Homomorphismen von Γ nach $\Gamma' = \Theta^{-1}(\Gamma)$ studieren. Dazu bestimmen wir jetzt die Gruppe Γ' . Die beiden Urbilder $g(p_1/2q, \dots, p_n/2q)$ und $-g(p_1/2q, \dots, p_n/2q)$ des Erzeugers $R(p_1/q, \dots, p_n/q)$ von Γ erzeugen Γ' .

1. Fall: $p_1 + \dots + p_n$ ungerade.

$$\begin{aligned} g(p_1/2q, \dots, p_n/2q)^q &= g(p_1/2, \dots, p_n/2) = \\ &= \cos(2\pi p_1/2) \cdot \dots \cdot \cos(2\pi p_n/2) = \\ &= e^{\pi i (p_1 + \dots + p_n)} = \\ &= -1. \end{aligned}$$

Daher hat $g(p_1/2q, \dots, p_n/2q)$ nicht die Ordnung q , sondern $2q$, und erzeugt somit die Gruppe Γ' . Also

$$\Gamma' = \langle g(p_1/2q, \dots, p_n/2q) \rangle \cong \mathbb{Z}_{2q}.$$

2. Fall: $p_1 + \dots + p_n$ gerade, q ungerade.

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} (-g(p_1/2q, \dots, p_n/2q))^q &= (-1)^q \cdot e^{\pi i (p_1 + \dots + p_n)} = \\ &= -1. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir diesmal

$$\Gamma' = \langle -g(p_1/2q, \dots, p_n/2q) \rangle \cong \mathbb{Z}_{2q}.$$

3. Fall: $p_1 + \dots + p_n$ gerade, q gerade.

$$\text{Nun ist } g(p_1/2q, \dots, p_n/2q)^q = (-g(p_1/2q, \dots, p_n/2q))^q = 1.$$

Setzen wir $\Gamma'' = \langle g(p_1/2q, \dots, p_n/2q) \rangle \cong \mathbb{Z}_q$, dann liefert die Abbildung $\Gamma'' \times \{-1, +1\} \rightarrow \Gamma'$, $(g, \epsilon) \rightarrow \epsilon \cdot g$, einen Isomorphismus. Also gilt

$$\Gamma' \cong \Gamma'' \times \{-1, +1\} \cong \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_2.$$

Linksinverse von $\mathbb{Z}_{2q} \rightarrow \mathbb{Z}_q$. Wir betrachten den Homomorphismus $\Theta' : \mathbb{Z}_{2q} \rightarrow \mathbb{Z}_q$, $[x]_{2q} \mapsto [x]_q$, und suchen Gruppenhomomorphismen $\epsilon' : \mathbb{Z}_q \rightarrow \mathbb{Z}_{2q}$ mit $\Theta' \circ \epsilon' = \text{id}_{\mathbb{Z}_q}$. Elementare Überlegungen liefern

LEMMA 5.1. *Ist q gerade, so gibt es kein solches ϵ' . Ist q ungerade, so gibt es genau eines und es hat die Form $\epsilon'([1]_q) = [q+1]_{2q}$.* ■

Spin-Strukturen von $L(q; p_1, \dots, p_n)$. Um die Frage nach den Spin-Strukturen auf den Linsenräumen zu untersuchen, kehren wir zu obiger Fallunterscheidung zurück.

1. Fall: $p_1 + \dots + p_n$ ungerade.

Da $\Gamma' \cong \mathbb{Z}_{2q}$ ist, besitzt $L(q; p_1, \dots, p_n)$ nach Lemma 5.1 keine Spin-Struktur, falls q gerade ist, und genau eine, falls q ungerade ist. Diese entspricht dem Homomorphismus

$$\begin{aligned}\varepsilon &: \Gamma \rightarrow \text{Spin}(2n), \\ R(p_1/q, \dots, p_n/q) &\rightarrow g(p_1(q+1)/2q, \dots, p_n(q+1)/2q).\end{aligned}$$

2. Fall: $p_1 + \dots + p_n$ gerade, q ungerade.

Wie im ersten Fall sehen wir, daß $L(q; p_1, \dots, p_n)$ genau eine Spin-Struktur besitzt, die folgendem Homomorphismus entspricht:

$$\begin{aligned}\varepsilon &: \Gamma \rightarrow \text{Spin}(2n), \\ R(p_1/q, \dots, p_n/q) &\rightarrow g(p_1(q+1)/2q, \dots, p_n(q+1)/2q).\end{aligned}$$

3. Fall: $p_1 + \dots + p_n$ gerade, q gerade.

Die Spin-Strukturen werden nun klassifiziert durch Homomorphismen $\mathbb{Z}_q \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Davon gibt es genau zwei, nämlich

$$\begin{aligned}\varepsilon_1' &: \mathbb{Z}_q \rightarrow \mathbb{Z}_2, [x]_q \rightarrow [0]_2 \text{ und} \\ \varepsilon_2' &: \mathbb{Z}_q \rightarrow \mathbb{Z}_2, [x]_q \rightarrow [x]_2.\end{aligned}$$

Also besitzt $L(q; p_1, \dots, p_n)$ genau zwei Spin-Strukturen, die folgenden Homomorphismen entsprechen:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &: \Gamma \rightarrow \text{Spin}(2n), \\ R(p_1/q, \dots, p_n/q) &\rightarrow g(p_1/2q, \dots, p_n/2q) \text{ und} \\ \varepsilon_2 &: \Gamma \rightarrow \text{Spin}(2n), \\ R(p_1/q, \dots, p_n/q) &\rightarrow -g(p_1/2q, \dots, p_n/2q).\end{aligned}$$

Wir fassen zusammen:

SATZ 5.2. Falls q ungerade ist, so besitzt $L(q; p_1, \dots, p_n)$ genau eine Spin-Struktur, die dem Homomorphismus

$$\begin{aligned}\varepsilon &: \Gamma \rightarrow \text{Spin}(2n), \\ R(p_1/q, \dots, p_n/q) &\rightarrow g(p_1(q+1)/2q, \dots, p_n(q+1)/2q)\end{aligned}$$

entspricht. Falls q gerade und $p_1 + \dots + p_n$ ungerade ist, so besitzt

$L(q; p_1, \dots, p_n)$ keine Spin-Struktur. Falls schließlich q gerade und $p_1 + \dots + p_n$ gerade ist, so hat $L(q; p_1, \dots, p_n)$ zwei Spin-Strukturen, die folgenden Homomorphismen entsprechen:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &: \Gamma \rightarrow \text{Spin}(2n), \\ R(p_1/q, \dots, p_n/q) &\rightarrow g(p_1/2q, \dots, p_n/2q) \text{ und} \\ \varepsilon_2 &: \Gamma \rightarrow \text{Spin}(2n), \\ R(p_1/q, \dots, p_n/q) &\rightarrow -g(p_1/2q, \dots, p_n/2q).\end{aligned}$$

Kombinieren wir Satz 4.1 mit den Ergebnissen aus diesem Abschnitt, so erhalten wir

SATZ 5.3. Ist q ungerade, so lauten die D-Poincaré-Reihen für $L(q; p_1, \dots, p_n)$:

$$\begin{aligned}F_+(z) &= \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = (-1)^{n+1}} e^{\pi i k (q+1) \sum \varepsilon_j p_j / q} - z \cdot \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = (-1)^n} e^{\pi i k (q+1) \sum \varepsilon_j p_j / q}}{\prod_{j=1}^n (e^{2\pi i k p_j / q} - z)(e^{-2\pi i k p_j / q} - z)}, \\ F_-(z) &= \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = (-1)^n} e^{\pi i k (q+1) \sum \varepsilon_j p_j / q} - z \cdot \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = (-1)^{n+1}} e^{\pi i k (q+1) \sum \varepsilon_j p_j / q}}{\prod_{j=1}^n (e^{2\pi i k p_j / q} - z)(e^{-2\pi i k p_j / q} - z)}.\end{aligned}$$

Sind q und $p_1 + \dots + p_n$ gerade, so lauten die D-Poincaré-Reihen zur ersten Spin-Struktur

$$F_+(z) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = (-1)^{n+1}} e^{\pi i k \sum \varepsilon_j p_j / q} - z \cdot \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = (-1)^n} e^{\pi i k \sum \varepsilon_j p_j / q}}{\prod_{j=1}^n (e^{2\pi i k p_j / q} - z)(e^{-2\pi i k p_j / q} - z)},$$

$$F_-(z) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\sum_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n = (-1)^n} e^{\pi i k \sum \varepsilon_j p_j / q} - z \cdot \sum_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n = (-1)^{n+1}} e^{\pi i k \sum \varepsilon_j p_j / q}}{\prod_{j=1}^n (e^{2\pi i k p_j / q} - z)(e^{-2\pi i k p_j / q} - z)},$$

zur zweiten Spin-Struktur dagegen:

$$F_+(z) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k \frac{\sum_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n = (-1)^{n+1}} e^{\pi i k \sum \varepsilon_j p_j / q} - z \cdot \sum_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n = (-1)^n} e^{\pi i k \sum \varepsilon_j p_j / q}}{\prod_{j=1}^n (e^{2\pi i k p_j / q} - z)(e^{-2\pi i k p_j / q} - z)},$$

$$F_-(z) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k \frac{\sum_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n = (-1)^n} e^{\pi i k \sum \varepsilon_j p_j / q} - z \cdot \sum_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n = (-1)^{n+1}} e^{\pi i k \sum \varepsilon_j p_j / q}}{\prod_{j=1}^n (e^{2\pi i k p_j / q} - z)(e^{-2\pi i k p_j / q} - z)}. \quad \blacksquare$$

Frage. Kann man, etwa unter Benutzung von Korollar 4.3, D -isospektrale, nicht isometrische Linsenräume finden?

6. DREIDIMENSIONALE BERGER-SPHÄREN

Wir verwenden jetzt das in Abschnitt 1.5 erläuterte Verfahren, um das Dirac-Spektrum auf den 3-dimensionalen Berger-Sphären mittels Frobenius-Reziprozität zu bestimmen. Wenige Tage nachdem der Autor dieser Zeilen das Spektrum der 3-dimensionalen Berger-Metriken berechnet hatte, widerfuhr ihm die unliebsame Überraschung mitgeteilt zu bekommen, daß dieses Beispiel seit langem bekannt ist. In der Tat hat Hitchin es bereits 1974 in [Hit] veröffentlicht. Wir führen die Rechnung trotzdem durch, da wir Teile davon im nächsten Abschnitt über die 3-dimensionalen Berger-Linsenräume benötigen werden.

Wir realisieren Σ_3 durch $\Delta_4^0 = \mathbb{C} \cdot Z() \oplus \mathbb{C} \cdot Z(1,2)$. In dieser Basis schreibt sich die Operation der orthonormalen Vektoren E_1, E_2, E_3 wie

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad E_1 E_2 E_3 = -1.$$

Wir wollen die Liegruppe $SU(2)$ mit einer gewissen linksinvarianten Metrik studieren, d.h. wir schreiben die S^3 als homogenen Raum $S^3 = G/H$, wobei $G = SU(2)$ und H trivial ist. Zunächst müssen wir die Metrik auf der Liealgebra $\mathfrak{su}(2)$ festlegen.

Die Algebra $\mathfrak{su}(2)$ besitzt die Basis

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

mit den Relationen $[X_1, X_2] = 2X_3$, $[X_2, X_3] = 2X_1$ und $[X_1, X_3] = -2X_2$. Wir setzen $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_2$ und $Y_3 = \frac{1}{T} X_3$, wo $T > 0$. Die linksinvariante Metrik auf $S^3 = SU(2)$, die Y_1, Y_2, Y_3 orthonormal macht, heißt *Berger-Metrik*. Für die resultierende Riemannsche Mannigfaltigkeit schreiben wir $S^3(T)$.

Die Relationen von $\mathfrak{su}(2)$ lauten nun:

$$[Y_1, Y_2] = 2TY_3, [Y_2, Y_3] = \frac{2}{T}Y_1, [Y_1, Y_3] = -\frac{2}{T}Y_2.$$

Die bilineare Abbildung U . Wir erinnern uns daran, daß die symmetrische bilineare Abbildung U erklärt ist durch

$$2 \langle U(X, Y), Z \rangle = \langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle.$$

Wenn wir für X, Y, Z die Y_j in irgendeiner Reihenfolge einsetzen, so sind wegen der Relationen in $\mathfrak{su}(2)$ die beiden Summanden auf der rechten Seite nur dann ungleich 0, wenn X, Y, Z paarweise verschieden sind. Also gilt $U(Y_j, Y_j) = 0, j = 1, 2, 3$. Aus

$$2 \langle U(Y_1, Y_2), Y_3 \rangle = \langle \frac{2}{T}Y_2, Y_2 \rangle + \langle Y_1, -\frac{2}{T}Y_1 \rangle = 0$$

folgt $U(Y_1, Y_2) = U(Y_2, Y_1) = 0$. Wegen

$$2 \langle U(Y_1, Y_3), Y_2 \rangle = \langle -2TY_3, Y_2 \rangle + \langle Y_1, \frac{2}{T}Y_1 \rangle = \frac{2}{T} - 2T$$

ist $U(Y_1, Y_3) = U(Y_3, Y_1) = (\frac{1}{T} - T) \cdot Y_2$. Schließlich folgt aus

$$2 \langle U(Y_2, Y_3), Y_1 \rangle = \langle 2TY_3, Y_1 \rangle + \langle Y_2, -\frac{2}{T}Y_2 \rangle = 2T - \frac{2}{T},$$

daß $U(Y_2, Y_3) = U(Y_3, Y_2) = (T - \frac{1}{T}) \cdot Y_1$.

Der Term 0-ter Ordnung. Unter Benutzung der Formel aus Satz 1.5.11 berechnen wir den Dirac-Operator. Um zunächst den Term 0-ter Ordnung zu bestimmen, müssen wir für $j = 1, 2, 3$ die Tripel $(-\frac{1}{2}[Y_i, Y_j] + U(Y_i, Y_j))_{i=1,2,3}$ berechnen und bezüglich der Basis Y_1, Y_2, Y_3 als Matrix schreiben.

Für $j=1$ erhalten wir $(0, TY_3, -TY_2)$, die zugehörige Matrix hat die Gestalt

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T \\ 0 & T & 0 \end{bmatrix}.$$

Sie wird unter Θ_*^{-1} abgebildet auf $-\frac{1}{2}TE_3E_2 = \frac{T}{2}E_2E_3$.

Analog sieht man, daß das zweite Tripel auf $-\frac{1}{2}TE_1E_3$, das dritte auf

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\frac{2}{T} - T)E_1E_2 \text{ abgebildet wird. Für den Term 0-ter Ordnung ergibt sich} \\ & E_1\frac{T}{2}E_2E_3 + E_2(-\frac{T}{2}E_1E_3) + E_3(\frac{1}{2}(\frac{2}{T} - T)E_1E_2) = \\ & = \left\{ \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}(\frac{2}{T} - T) \right\} E_1E_2E_3 = -\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{2}T\right). \end{aligned}$$

Irreduzible Darstellungen von $SU(2)$. Wie man zum Beispiel in [Br-tD, S. 84ff] nachlesen kann, sind die irreduziblen unitären Darstellungen von $SU(2)$ gegeben durch die (π_n, V_n) , wobei V_n der Vektorraum der komplexen homogenen Polynome vom Grad n in den zwei Variablen z_1 und z_2 ist, d.h. V_n ist der Spann der $P_0, \dots, P_n$, wobei $P_k(z_1, z_2) = z_1^{n-k}z_2^k, n \geq 0$. Die Gruppe $SU(2)$ operiert wie folgt: Für $g \in SU(2), P \in V_n, z = (z_1, z_2)$ gilt

$$(\pi_n(g)P)(z) = P(z \cdot g).$$

Frobenius-Reziprozität. Gemäß Satz 1.5.10 haben wir die Aufspaltung

$$L^2(S^3, \Sigma S^3) = L^2(SU(2), \Sigma_3) = \bigoplus_{n \geq 0} V_n \otimes \overline{\text{Hom}(V_n, \Sigma_3)},$$

wobei für $v \otimes A \in V_n \otimes \text{Hom}(V_n, \Sigma_3)$ gilt:

$$v \otimes A(g) = A\pi_n(g^{-1})v.$$

Die Unterräume $V_n \otimes \text{Hom}(V_n, \Sigma_3)$ sind D -invariant, die Einschränkung von D auf diesen Unterraum ist $\text{id} \otimes D_n$. Wie in Lemma 1.5.11 angegeben, ist D_n die Summe eines Termes 1. Ordnung D_n' und eines Termes 0-ter Ordnung. Den Term 0-ter Ordnung haben wir bereits berechnet, er ist einfach Multiplikation mit $-(\frac{1}{T} + \frac{1}{2}T)$. Der Term 1-ter Ordnung ist nach Lemma 1.5.11 gegeben durch

$$D_n'A = -\sum_{j=1}^3 E_j A \pi_n(Y_j).$$

Wir haben die Eigenwerte von D_n' auf $\text{Hom}(V_n, \Sigma_3)$ zu berechnen, den Term $-(\frac{1}{T} + \frac{1}{2}T)$ zu addieren, und die Multiplizitäten mit $\dim V_n = n+1$ zu multiplizieren.

Berechnung von π_{n*} . Wir berechnen nun die Endomorphismen $\pi_{n*}(Y_j)$, und drücken sie bezüglich der Basis $P_0, \dots, P_n$ als Matrix aus.

$$\begin{aligned} (\pi_{n*}(Y_1)P_k)(z) &= \left(\frac{d}{ds} (\text{id} + sY_1)P_k \Big|_{s=0} \right)(z) = \\ &= \frac{d}{ds} P_k \left((z_1, z_2) \begin{pmatrix} 1 & is \\ is & 1 \end{pmatrix} \right) \Big|_{s=0} = \\ &= \frac{d}{ds} (z_1 + isz_2)^{n-k} (isz_1 + z_2)^k \Big|_{s=0} = \\ &= i(n-k)z_1^{n-k-1}z_2^{k+1} + ikz_1^{n-k+1}z_2^{k-1} = \\ &= i(n-k)P_{k+1}(z) + ikP_{k-1}(z). \end{aligned}$$

Die Matrixdarstellung von $\pi_{n*}(Y_1)$ ist daher

$$\pi_{n*}(Y_1) = i \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 2 \\ 0 & n-1 & 0 \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right]$$

Analog sieht man, daß

$$\pi_{n*}(Y_2) = \left[\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ n & 0 & -2 \\ 0 & n-1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ -n \\ 1 \\ 0 \end{array}$$

und

$$\pi_{n^*}(Y_3) = \frac{i}{I} \left[\begin{array}{cc} n & \bigcirc \\ n-2 & \\ & \bigcirc \\ & \vdots \\ & -n \end{array} \right]$$

Eine Basis von $\text{Hom}(V_n, \Sigma_3)$. Für den $2 \cdot (n+1)$ -dimensionalen $\mathbb{C}$ -Vektorraum $\text{Hom}(V_n, \Sigma_3)$ definieren wir die Basis $A_0, \dots, A_n, B_0, \dots, B_n$ durch

$$A_k(p_l) = \begin{cases} Z() & , \text{ falls } k = l, k \text{ gerade} \\ Z(1,2) & , \text{ falls } k = l, k \text{ ungerade} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$B_k(P_l) := \begin{cases} Z() & , \text{ falls } k = l, k \text{ ungerade} \\ Z(1,2) & , \text{ falls } k = l, k \text{ gerade} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Man berechnet leicht, daß für gerades k gilt

$$E_1 \cdot A_k \cdot \pi_{n^*}(Y_1) = (k-n-1) A_{k-1} - (k+1) A_{k+1} \quad ,$$

$$E_2 \cdot A_k \cdot \pi_{n*}(Y_2) = (n-k+1) A_{k-1} - (k+1) A_{k+1} \quad ,$$

$$E_3 \cdot A_k \cdot \pi_{n^*}(Y_3) = \frac{1}{T} (2k-n) A_k.$$

Also gilt für gerades k

$$D_n' A_k = \frac{1}{T} (n-2k) A_k + 2(k+1) A_{k+1}.$$

Ist k dagegen ungerade, so erhalten wir

$$E_1 \cdot A_k \cdot \pi_{n^*}(Y_1) = (k-n-1) A_{k-1} - (k+1) A_{k+1} \quad ,$$

$$E_2 \cdot A_k \cdot \pi_{n*}(Y_2) = (k-n-1) A_{k-1} + (k+1) A_{k+1},$$

$$E_3 \cdot A_k \cdot \pi_{n^*}(Y_3) = \frac{1}{T} (n-2k) A_k.$$

Für ungerades k gilt mithin

$$D_n' A_k = 2(n+1-k) A_{k-1} + \frac{1}{T} (2k-n) A_k.$$

Wir sehen, daß der von den A_k aufgespannte Unterraum von $\text{Hom}(V_n, \Sigma_3)$ D_n -invariant ist. In der Basis der A_k hat D_n Block-

Diagonal-Gestalt mit 2×2-Blöcken auf der Diagonale und einem 1×1-Block rechts unten, falls n gerade ist.

Die 2×2-Blöcke haben die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{T} (n-2l) & 2(n-l) \\ 2(l+1) & \frac{1}{T} (2l+2-n) \end{pmatrix}, \quad l = 0, 2, \dots, \begin{cases} n-1, & n \text{ ungerade} \\ n-2, & n \text{ gerade} \end{cases}.$$

Der 1×1-Block, der für gerades n auftritt, hat den Eintrag $-\frac{n}{T}$.

Bei den B_k vertauschen sich die Fälle „ k gerade“ und „ k ungerade“, d.h. wir erhalten für gerades k :

$$D_n' B_k = 2(n+1-k) B_{k-1} + \frac{1}{T} (2k-n) B_k,$$

und für ungerades k :

$$D_n' B_k = \frac{1}{T} (n-2k) B_k + 2(k+1) B_{k+1}.$$

In der Basis der B_k hat D_n' wiederum Block-Diagonal-Gestalt mit einem 1×1-Block links oben, anschließend 2×2-Blöcken, und schließlich für ungerades n einem 1×1-Block rechts unten. Die 1×1-Blöcke haben den Eintrag $-\frac{n}{T}$, die 2×2-Blöcke sind wiederum

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{T} (n-2l) & 2(n-l) \\ 2(l+1) & \frac{1}{T} (2l+2-n) \end{pmatrix},$$

$$\text{diesmal } l = 1, 3, \dots, \begin{cases} n-1, & n \text{ gerade} \\ n-2, & n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Die Eigenwerte. Nun berechnen wir die Eigenwerte von D_n' auf $\text{Hom}(V_n, \Sigma_3)$. Die 1×1-Blöcke liefern zweimal den Eigenwert $-\frac{n}{T}$. Wir müssen die Eigenwerte der 2×2-Blöcke

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{T} (n-2l) & 2(n-l) \\ 2(l+1) & \frac{1}{T} (2l+2-n) \end{pmatrix}, \quad l = 0, 1, \dots, n-1, \text{ bestimmen.}$$

Für das charakteristische Polynom p erhalten wir

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \left[\frac{1}{T} (n-2l) - \lambda \right] \left[\frac{1}{T} (2l+2-n) - \lambda \right] - 4(l+1)(n-l) = \\ &= \lambda^2 - \frac{2}{T} \lambda + \frac{1}{T^2} (n-2l)(2l+2-n) - 4(l+1)(n-l). \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{T} \pm \left[\frac{4}{T^2} - \frac{4}{T^2} (n-2l)(2l+2-n) + 16(l+1)(n-l) \right]^{1/2} \right\} \\ &= \frac{1}{T} \pm \left[\frac{1}{T^2} (n-2l-1)^2 + 4(l+1)(n-l) \right]^{1/2} = \\ &= \frac{1}{T} \pm \left\{ \left(\frac{1}{T^2} - 1 \right) (n-2l-1)^2 + (n+1)^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Damit haben wir die Eigenwerte von D_n' berechnet. Wir addieren nun den Term 0-ter Ordnung $-(\frac{1}{T} + \frac{1}{2} T)$ und erhalten die D -Eigenwerte:

Eigenwert	Multiplizität
$-\frac{n+1}{T} - \frac{1}{2} T$	$2(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$
$-\frac{1}{2} T \pm \left\{ \left(\frac{1}{T^2} - 1 \right) (n-2l-1)^2 + (n+1)^2 \right\}^{1/2},$	$n+1, \quad n = 1, 2, \dots$ $l = 0, 1, \dots, n-1$

Wir machen jetzt noch die Substitution $m = n+1, k = l+1$ und erhalten:

SATZ 6.1. Auf der Berger-Sphäre $S^3(T)$ hat der klassische Dirac-Operator die folgenden Eigenwerte:

- (i) $-\frac{m}{T} - \frac{T}{2}$ mit Multiplizität $2m, \quad m = 1, 2, 3, \dots$
- (ii) $-\frac{1}{2} T \pm \left\{ \left(\frac{1}{T^2} - 1 \right) (m-2k)^2 + m^2 \right\}^{1/2}$ mit Multiplizität $m, \quad m = 2, 3, 4, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, m-1.$ ■

Kollaps. Für $T \rightarrow 0$ kollabiert $S^3(T)$ gegen die S^2 mit konstanter Krümmung 4. Sehen wir uns kurz an, wie sich das Spektrum verhält. Für $T \rightarrow 0$ streben die Eigenwerte gegen $\pm\infty$, es sei denn, der Eigenwert ist vom Typ (ii) und der Koeffizient $(m-2k)^2$ von $(\frac{1}{T^2} - 1)$ ist Null. In diesem Fall ist der Grenzwert $\pm m$ mit Multiplizität m . Das Spektrum konvergiert also gegen $\{\dots, -4, -2, 2, 4, 6, \dots\}$, wobei die Multiplizität von $\pm m$ gerade m ist. Das ist in der Tat genau das Dirac-Spektrum auf der runden S^2 mit Krümmung 4, siehe Abschnitt 3.

Harmonische Spinorfelder. Der Grund, warum Hitchin das Dirac-Spektrum auf $S^3(T)$ bestimmt hat, ist die folgende Beobachtung. Für $m = 2k$ betrachten wir den Eigenwert $-\frac{1}{2}T + m$ mit Multiplizität m . Falls wir $T = m/2$ setzen, ist dieser Eigenwert gleich 0. Der Raum der harmonischen Spinorfelder ist dann also mindestens m -dimensional. Wir können somit durch geeignete Wahl von T erreichen, daß der Raum der harmonischen Spinorfelder beliebig groß wird. Eine entsprechende Beobachtung haben wir auch schon bei den Heisenberg-Mannigfaltigkeiten gemacht, vergleiche Abschnitt 2.

7. DREIDIMENSIONALE BERGER-LINSENÄUME

Wir betrachten nun die homogenen Linsenräume $\mathcal{L}(N, T) = S^3(T)/\mathbf{Z}_N = \text{SU}(2)/\mathbf{Z}_N$, wobei wir $\mathbf{Z}_N = \{ e^{2\pi i m/N} \mid m \in \mathbf{Z} \}$ durch

$$e^{it} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$$

in $\text{SU}(2)$ einbetten. Topologisch erhalten wir den Linsenraum $L(N; 1, 1)$ aus Abschnitt 5, aber die Riemannsche Metrik ist nur für $T = 1$ die Metrik konstanter Krümmung.

Wir verwenden nun stets die Notationen aus dem letzten Abschnitt.

Isotropiedarstellung von $\mathbf{Z}_N$. Um die Spin-Strukturen von $\mathcal{L}(N, T)$ handhaben zu können, müssen wir die Isotropiedarstellung von $\mathbf{Z}_N$ kennen.

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{e^{it}} Y_1 &= \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & ie^{2it} \\ ie^{-2it} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \cos(2t) Y_1 + \sin(2t) Y_2 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{e^{it}} Y_2 &= \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -e^{2it} \\ e^{-2it} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= -\sin(2t) Y_1 + \cos(2t) Y_2 . \end{aligned}$$

$$\text{Ad}_{e^{it}} Y_3 = Y_3 .$$

Also ist die Isotropiedarstellung $\mathbf{Z}_N \rightarrow \text{SO}(3)$ gegeben durch

$$e^{it} \rightarrow \begin{bmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) & 0 \\ \sin(2t) & \cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die erste Spin-Struktur. Wie in Abschnitt I.4 erläutert, identifizieren wir Spin(3) mit SU(2) und können sofort eine Spin-Struktur von $\mathcal{L}(N, T)$, d.h. einen Lift der Isotropiedarstellung, angeben, nämlich

$$\mathbf{Z}_N \rightarrow \text{SU}(2), \quad e^{it} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}.$$

Man beachte, daß die Gruppe SU(2) in der Behandlung dieses Beispiels eine Doppelrolle spielt; sie ist einerseits die Gruppe G unseres homogenen Raumes G/H , andererseits ist sie die Überlagerungsgruppe Spin(n) über SO(n).

Irreduzible Darstellungen von $\mathbf{Z}_N$. Um den Unterraum $\text{Hom}_{\mathbf{Z}_N}(V_n, \Sigma_3) \subset \text{Hom}(V_n, \Sigma_3)$ zu bestimmen, zerlegen wir die Spin-Darstellung und die Darstellungen π_n , jeweils eingeschränkt auf $\mathbf{Z}_N$, in die $\mathbf{Z}_N$ -irreduziblen Komponenten.

Die irreduziblen Darstellungen von $\mathbf{Z}_N$ sind

$$\rho_m : \mathbf{Z}_N \rightarrow \text{U}(1), \quad z \mapsto z^m, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Zwei solche Darstellungen ρ_m und $\rho_{m'}$ sind genau dann äquivalent, wenn $m \equiv m' \pmod{N}$.

Da die Spin-Darstellung von Spin(3) = SU(2) genau die Standard-Darstellung von SU(2) ist, erhalten wir für die Einschränkung auf $\mathbf{Z}_N$ die Darstellung $\rho_1 \oplus \rho_{-1}$.

Wie operiert $\mathbf{Z}_N$ auf $P_k \in V_n$?

$$\begin{aligned} (e^{it} P_k)(z) &= P_k(e^{it} z_1, e^{-it} z_2) = \\ &= e^{it(n-2k)} P_k(z). \end{aligned}$$

Also operiert $\mathbf{Z}_N$ auf $\mathbb{C} \cdot P_k$ durch ρ_{n-2k} .

Um $\text{Hom}_{\mathbf{Z}_N}(V_n, \Sigma_3)$ zu bestimmen, müssen wir die zulässigen A_k, B_k finden, d.h. diejenigen, die äquivalente Darstellungen ineinander überführen.

Der Fall $N = 2$. Wir betrachten zunächst den Fall $N = 2$, d.h. den reell projektiven Raum $\mathbb{RP}^3(T) = \mathcal{L}(2, T)$. In diesem Fall sind ρ_1 und ρ_{-1} äquivalent. Die Darstellung ρ_{n-2k} ist genau dann äquivalent zu ρ_1 , wenn n ungerade ist. Daher ist $\text{Hom}_{\mathbf{Z}_N}(V_n, \Sigma_3) = 0$, wenn n gerade ist, aber $\text{Hom}_{\mathbf{Z}_N}(V_n, \Sigma_3) = \text{Hom}(V_n, \Sigma_3)$, falls n ungerade ist.

Das D -Spektrum für $\mathbb{RP}^3(T)$ besteht somit genau aus den Eigenwerten von $S^3(T)$ aus Satz 6.1, die den geraden Parametern $m = n+1$ entsprechen. Nach der Substitution $m = 2m'$ erhalten wir

Eigenwert	Multiplizität
$-\frac{2m'}{T} - \frac{1}{2}T$	$4m', \quad m' = 1, 2, \dots$
$-\frac{1}{2}T \pm 2 \left\{ \left(\frac{1}{T^2} - 1 \right) (m' - k)^2 + m'^2 \right\}^{1/2}$	$2m', \quad \begin{matrix} m' = 1, 2, \dots \\ k = 1, \dots, 2m' - 1 \end{matrix}$

Der Fall $N \geq 3$. Für $N \geq 3$ sind ρ_1 und ρ_{-1} inäquivalent. Wir untersuchen, welche $A_j \in \text{Hom}(V_n, \Sigma_3)$ auch in $\text{Hom}_{\mathbf{Z}_N}(V_n, \Sigma_3)$ liegen.

Für gerades j ist A_j genau dann $\mathbf{Z}_N$ -äquivariant, wenn ρ_1 und ρ_{n-2j} äquivalent sind, d.h. wenn $n - 2j \equiv 1 \pmod{N}$. Dann ist $n - 2(j+1) \equiv -1 \pmod{N}$, d.h. A_{j+1} ist ebenfalls in $\text{Hom}_{\mathbf{Z}_N}(V_n, \Sigma_3)$. Der 2×2 -Block

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{T}(n-2l) & 2(n-l) \\ 2(l+1) & \frac{1}{T}(2l+2-n) \end{pmatrix}$$

bleibt uns also erhalten, falls $n - 2l \equiv 1 \pmod{N}$, l gerade.

Der 1×1 -Block rechts unten für gerades n bleibt erhalten, falls $n \equiv -1 \pmod{N}$. Nach der Substitution $m = n+1$, $k = l+1$, lautet die Bedingung

für die 2×2 -Blöcke $m - 2k \equiv 0 \pmod{N}$, für den 1×1 -Block m ungerade und $m \equiv 0 \pmod{N}$.

Genauso analysiert man den von den B_j aufgespannten Unterraum von $\text{Hom}(V_n, \Sigma_3)$ und erhält, daß die 2×2 -Blöcke erhalten bleiben, falls $n - 2l \equiv 1 \pmod{N}$, l ungerade, der 1×1 -Block links oben, falls $n \equiv -1 \pmod{N}$, und der 1×1 -Block rechts unten, falls n ungerade und $n \equiv -1 \pmod{N}$.

Insgesamt bleiben die 2×2 -Blöcke erhalten, für die $m - 2k \equiv 0 \pmod{N}$, und zwei 1×1 -Blöcke, falls $m \equiv 0 \pmod{N}$.

Wir erhalten die Tabelle

Eigenwert	Multiplizität
$-\frac{iN}{T} - \frac{1}{2}T$	$2iN, \quad i = 1, 2, \dots$
$-\frac{1}{2}T \pm \left\{ \left(\frac{1}{T^2} - 1 \right) i^2 N^2 + m^2 \right\}^{1/2}$	$m, \quad \begin{matrix} m = 2, 3, \dots \\ \left[-(m+1)/N \right] < i \leq \\ \leq \left[(m-2)/N \right] \end{matrix}$

Die zweite Spin-Struktur. Für gerades $N = 2N'$ haben wir eine zweite Spin-Struktur von $\mathcal{L}(N, T)$. Diese entspricht dem Lift $\mathbf{Z}_N \rightarrow \text{SU}(2)$,

$$e^{2\pi i q/N} \rightarrow (-1)^q \begin{pmatrix} e^{2\pi i q/N} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i q/N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2\pi i q(1+N')/N} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i q(1-N')/N} \end{pmatrix}.$$

Jetzt operiert $\mathbf{Z}_N$ auf Σ_3 durch $\rho_{N'+1} \otimes \rho_{N'-1}$.

Eine ähnliche Analyse wie für die erste Spin-Struktur zeigt, daß für $N = 2$ diesmal gerade die Eigenwerte von $S^3(T)$ auch Eigenwerte von $\mathbb{RP}^3(T)$ sind, die den ungeraden Parametern m entsprechen. Damit können wir für $\mathbb{RP}^3(T)$ die Ergebnisse zusammenfassen.

SATZ 7.1. *Der reell-projektive Raum $\mathbb{RP}^3(T)$ besitzt zwei Spin-Strukturen. Bezüglich der ersten lauten die Eigenwerte des Dirac-Operators:*

- (i) $-\frac{2m'}{T} - \frac{1}{2}T$, mit Multiplizität $4m'$, $m' = 1, 2, \dots$
- (ii) $-\frac{1}{2}T \pm 2 \left\{ \left(\frac{1}{T^2} - 1 \right) (m' - k)^2 + m'^2 \right\}^{1/2}$, jeweils mit Multiplizität $2m'$, $m' = 1, 2, \dots$, $k = 1, \dots, 2m' - 1$.

Bezüglich der anderen Spin-Struktur hat der Dirac-Operator die Eigenwerte:

- (i) $-\frac{2m'+1}{T} - \frac{1}{2}T$, mit Multiplizität $2(2m'+1)$, $m' = 0, 1, 2, \dots$
- (ii) $-\frac{1}{2}T \pm \left\{ \left(\frac{1}{T^2} - 1 \right) (2m'+1-2k)^2 + (2m'+1)^2 \right\}^{1/2}$, jeweils mit Multiplizität $2m' + 1$, $m' = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots, 2m'$.

Kollaps. Das Spektrum von $S^3(T)$ teilt sich disjunkt auf in das Spektrum von $\mathbb{RP}^3(T)$ bezüglich der ersten und der zweiten Spin-Struktur. Wie $S^3(T)$ kollabiert auch $\mathbb{RP}^3(T)$ für $T \rightarrow 0$ gegen die S^2 mit Krümmung 4. Auf $S^3(T)$ gibt es zwei Sorten von Eigenwerten, die einen konvergieren gegen die Eigenwerte von S^2 , die anderen streben gegen $\pm\infty$. Die „guten“ konvergierenden Eigenwerte sind diejenigen vom Typ (ii) mit $m = 2k$, insbesondere muß für sie m gerade sein. Somit sind die „guten“ Eigenwerte stets Eigenwerte von $\mathbb{RP}^3(T)$ bzgl. der ersten und niemals bzgl. der zweiten Spin-Struktur.

Wir haben also gesehen, daß für die erste Spin-Struktur $\mathbb{RP}^3(T)$ das selbe Verhalten an den Tag legt wie $S^3(T)$, nämlich daß ein Teil des Spektrums gegen das Spektrum auf S^2 konvergiert, während der Rest gegen $\pm\infty$ geht. Für die andere Spin-Struktur dagegen streben alle Eigenwerte gegen $\pm\infty$.

III. EIGENWERTABSCHÄTZUNGEN

1. UNTERE SCHRANKEN

Sei M eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n . Es sei V ein Clifford-Bündel über M mit Clifford-Zusammenhang ∇^{Cl} , Dirac-Operator D und Krümmungsendomorphismus K .

Für $\kappa \in \mathbb{R}$ gelte $K \geq \kappa$, d.h. für alle $\Psi \in V$ ist $\langle K\Psi, \Psi \rangle \geq \kappa \|\Psi\|^2$. Aus der Weitzenböck-Formel I.2.2 folgt unmittelbar, daß für alle Eigenwerte λ von D gilt $\lambda^2 \geq \kappa$, denn für ein Eigenspinorfeld Ψ von D zu λ ist

$$\lambda^2 \|\Psi\|^2 = (D^2\Psi, \Psi) = ((\nabla^{Cl})^* \nabla^{Cl} \Psi, \Psi) + (K\Psi, \Psi) = \|\nabla^{Cl} \Psi\|^2 + (K\Psi, \Psi) \geq \kappa \|\Psi\|^2.$$

Diese Abschätzung hat nur den Nachteil, daß sie lediglich für positives κ eine Aussage liefert, da aber z.B. für den klassischen Dirac-Operator niemals scharf ist, denn auf Räumen mit positiver Skalarkrümmung gibt es keine ∇^Σ -parallelen Spinorfelder.

Allerdings gibt es mitunter Killing-Spinoren auf Räumen mit positiver Einstein-Metrik, daher können wir versuchen obige Abschätzung zu verbessern, indem wir statt ∇^{Cl} den modifizierten Zusammenhang $\hat{\nabla}$ aus Proposition I.2.8 benutzen. Auf diese Weise erhielt Friedrich in [Fr1] für den klassischen Dirac-Operator eine bessere Abschätzung; da der Beweis für verallgemeinerte Dirac-Operatoren derselbe ist, geben wir gleich die allgemeinere Ungleichung an:

SATZ 1.1. (Friedrich)

Für alle Eigenwerte λ von D gilt:

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{n-1} \kappa.$$

Es bleibt für die zweite Spin-Struktur noch der Fall $N' \geq 2$ zu behandeln. In diesem Fall sind $\rho_{N'+1}$ und $\rho_{N'-1}$ inäquivalent. Eine Analyse wie für die erste Spin-Struktur zeigt, daß die 2×2 -Blöcke erhalten bleiben, wenn $m - 2k \equiv N' \pmod{N}$, die 1×1 -Blöcke, falls $m \equiv N' \pmod{N}$. Damit können wir auch hier zusammenfassen:

SATZ 7.2. Der Linsenraum $\mathcal{L}(N, T)$, $N \geq 3$, besitzt stets eine „kanonische“ Spin-Struktur, für die der Dirac-Operator folgende Eigenwerte hat:

- (i) $-\frac{iN}{T} - \frac{1}{2}T$, mit Multiplizität $2iN$, $i = 1, 2, \dots$
- (ii) $-\frac{1}{2}T \pm \left\{ \left(\frac{1}{T^2} - 1 \right) i^2 N^2 + m^2 \right\}^{1/2}$, jeweils mit Multiplizität m ,
 $m = 2, 3, \dots$, $\left[-(m+1)/N \right] < i \leq \left[(m-2)/N \right]$.

Für gerades $N = 2N'$ besitzt $\mathcal{L}(N, T)$ noch eine weitere Spin-Struktur, für die der Dirac-Operator die folgenden Eigenwerte hat:

- (i) $-\frac{N'+iN}{T} - \frac{1}{2}T$, mit Multiplizität $2(N' + iN)$, $i = 0, 1, 2, \dots$
- (ii) $-\frac{1}{2}T \pm \left\{ \left(\frac{1}{T^2} - 1 \right) (N' + iN)^2 + m^2 \right\}^{1/2}$, jeweils mit Multiplizität m ,
 $m = 2, 3, \dots$, $\left[(1-m-N')/N \right] < i \leq \left[(m-2-N')/N \right]$. ■

Weitere bekannte Beispiele. Der Vollständigkeit halber sei zum Ende dieses Kapitels noch erwähnt, daß es zwei weitere Beispiele gibt, deren Dirac-Spektrum bekannt ist. In beiden Fällen handelt es sich um symmetrische Räume, deren Spektrum mittels Frobenius-Reziprozität bestimmt wird.

Es handelt sich einerseits um die orientierten Graßmann-Mannigfaltigkeiten $G_{2,2p} = SO(2p)/SO(2) \times SO(2p-2)$, siehe [Str3]. Das andere Beispiel sind die komplex-projektiven Räume $\mathbb{CP}^{2p-1}$, siehe [CFG].

Der Beweis funktioniert wie oben, nur daß statt der Weitzenböck-Formel Proposition 1.2.8 benutzt wird mit $\mu = \lambda/n$.

Im Fall des klassischen Dirac-Operators ist Gleichheit in dieser Ungleichung gleichbedeutend mit der Existenz von Killing-Spinoren. Insbesondere folgt dann gemäß Proposition 1.7.1, daß M eine Einstein-Mannigfaltigkeit ist. Die Frage nach der Existenz von Killing-Spinoren wurde von Friedrich und seinen Schülern intensiv studiert; der interessierte Leser werfe einen Blick ins Literaturverzeichnis.

Hijazi bemerkte, daß Friedrichs Schranke für den klassischen Dirac-Operator auf Kähler-Mannigfaltigkeiten niemals scharf sein kann. Dies veranlaßte Kirchberg dazu, die Abschätzung in diesem Fall zu verbessern.

SATZ 1.2. (Kirchberg)

Es sei M eine geschlossene Kähler-Spin-Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $m = n/2$. Für die Skalkrümmung gelte $S \geq S_0 > 0$. Es sei λ ein Eigenwert des klassischen Dirac-Operators D .

(i) Falls m ungerade ist, gilt $\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{n+2}{n} \cdot S_0$.

(ii) Falls m gerade ist, gilt $\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot S_0$. ■

Beide Ungleichungen sind scharf in dem Sinne, daß es Beispiele gibt, für die der betragsmäßig kleinste Eigenwert die Wurzel aus der unteren Schranke als Wert annimmt. Zum Beweis von Satz 1.2 siehe [Kir1] und [Kir3].

Mit den bisherigen Abschätzungen für den klassischen Dirac-Operator können nur Beispiele mit strikt positiver Skalkrümmung behandelt werden. Ein erster Schritt, sich von dieser Voraussetzung zu lösen, ist Hijazis Ungleichung.

SATZ 1.3. (Hijazi)

Sei M eine geschlossene Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$. Es sei λ ein Eigenwert des klassischen Dirac-Operators D .

Dann gilt $\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \mu_1$,

wobei μ_1 der erste Eigenwert des Yamabe-Operators $4 \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \Delta_0 + S$ ist. ■

Der Beweis beruht auf der Betrachtung des modifizierten Zusammenhangs $\tilde{\nabla}$ aus Proposition 1.2.8 für $\mu = \lambda/n$, kombiniert mit einer geeigneten konformen Änderung der Riemannschen Metrik auf M , siehe [Hij].

Wir werden im folgenden eine untere Abschätzung beweisen, aus der unter anderem auch Hijazis Ungleichung folgt. Dazu machen wir zunächst einige algebraische Vorbereitungen.

Sei $p \in M$ fest. Wir setzen

$$\gamma : V_p \rightarrow T_p^*M \otimes V_p, \quad (\gamma\psi)(X) := X \cdot \psi \quad \forall X \in T_pM.$$

Für festes $X \in T_pM$ definieren wir

$$\gamma_X : V_p \rightarrow V_p, \quad \gamma_X\psi := X \cdot \psi,$$

$$\iota_X : T_p^*M \otimes V_p \rightarrow V_p, \quad \iota_X\phi := \phi(X),$$

$$\tau_X : V_p \rightarrow T_p^*M \otimes V_p, \quad \tau_X\psi := X^b \otimes \psi,$$

wobei $b : T_pM \rightarrow T_p^*M$ der durch die Riemannsche Metrik induzierte Isomorphismus ist.

Sei $E_1, \dots, E_n$ eine Orthonormalbasis von T_pM , $E_1^*, \dots, E_n^*$ die duale Basis von T_p^*M . Wir drücken die soeben definierten algebraischen Operatoren in den Basen aus:

$$\gamma\psi = \sum_j E_j^* \otimes E_j \cdot \psi,$$

$$\iota_X \left(\sum_j E_j^* \otimes \phi_j \right) = \sum_j \langle X, E_j \rangle \phi_j,$$

$$\tau_X\psi = \sum_j E_j^* \otimes \langle X, E_j \rangle \psi$$

Für die Transponierte γ^* von γ gilt:

$$\gamma^* (\sum_j E_j^* \otimes \phi_j) = - \sum_j E_j \cdot \phi_j.$$

LEMMA 1.4. a) $\iota_X^* = \tau_X$

b) $\gamma_X^* = -\gamma_X$

c) $\gamma^* \gamma = n$

d) $\iota_X \cdot \gamma = \gamma_X$

e) $\iota_X \cdot \tau_X = |X|^2$

f) $(\text{id} \otimes \gamma_X) \cdot \gamma + \gamma \cdot \gamma_X = -2\tau_X$

g) $\gamma^* \cdot (\text{id} \otimes \gamma_X) + \gamma_X \cdot \gamma^* = 2\iota_X$

h) $\gamma^* \cdot (\text{id} \otimes \gamma_X) \cdot \gamma = -(n-2)\gamma_X.$

BEWEIS: a) Es sei $\Phi = \sum_j E_j^* \otimes \phi_j$. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle \tau_X \Psi, \Phi \rangle &= \langle \sum_k E_k^* \otimes \langle X, E_k \rangle \Psi, \sum_j E_j^* \otimes \phi_j \rangle = \\ &= \sum_j \langle \langle X, E_j \rangle \Psi, \phi_j \rangle = \\ &= \langle \Psi, \sum_j \langle X, E_j \rangle \phi_j \rangle = \\ &= \langle \Psi, \iota_X \Phi \rangle. \end{aligned}$$

b) $\langle \gamma_X \Psi, \Psi' \rangle = \langle X \cdot \Psi, \Psi' \rangle = -\langle \Psi, X \cdot \Psi' \rangle = -\langle \Psi, \gamma_X \cdot \Psi' \rangle.$

c) $\gamma^* \gamma \Psi = \gamma^* \sum_j E_j^* \otimes E_j \cdot \Psi = -\sum_j E_j E_j \Psi = n \Psi.$

d) ist klar.

e) $\iota_X \cdot \tau_X \Psi = \iota_X (X^b \otimes \Psi) = \langle X, X \rangle \Psi.$

$$\begin{aligned} \text{f) } (\text{id} \otimes \gamma_X) \cdot \gamma \Psi + \gamma \gamma_X \Psi &= (\text{id} \otimes \gamma_X) \sum_j E_j^* \otimes E_j \Psi + \gamma X \cdot \Psi = \\ &= \sum_j E_j^* \otimes (X E_j + E_j X) \Psi = \\ &= \sum_j E_j^* \otimes (-2\langle X, E_j \rangle) \Psi = \\ &= -2\tau_X \Psi. \end{aligned}$$

g) folgt durch Adjungierung von f) und Einsetzen von a) und b).

$$\begin{aligned} \text{h) } \gamma^* \cdot (\text{id} \otimes \gamma_X) \cdot \gamma &= -\gamma_X \cdot \gamma^* \cdot \gamma + 2\iota_X \cdot \gamma = \\ &= -n\gamma_X + 2\gamma_X. \blacksquare \end{aligned}$$

LEMMA 1.5. a) $\gamma^* \cdot \nabla^{Cl} = (\nabla^{Cl})^* \cdot \gamma = -D$

b) $(\nabla^{Cl})^* \cdot (\text{id} \otimes \gamma_{\text{grad} f}) \cdot \gamma = -\gamma_{\text{grad} f} \cdot D - \Delta_0 f,$

für $f \in C^2(M, \mathbb{R})$.

BEWEIS: Sei nun $p \in M$, $E_1, \dots, E_n$ synchron um p . Dann gilt in p :

a) $\gamma^* \cdot \nabla^{Cl} \Psi = \gamma^* \sum_j E_j^* \otimes \nabla_j^{Cl} \Psi = -\sum_j E_j \nabla_j^{Cl} \Psi = -D \Psi.$

Wegen $D = D^*$ folgt auch $(\nabla^{Cl})^* \cdot \gamma = -D.$

$$\begin{aligned} \text{b) } (\nabla^{Cl})^* \cdot (\text{id} \otimes \gamma_{\text{grad} f}) \cdot \gamma \Psi &= (\nabla^{Cl})^* \cdot (\text{id} \otimes \gamma_{\text{grad} f}) \sum_j E_j^* \otimes E_j \Psi = \\ &= (\nabla^{Cl})^* \sum_j E_j^* \otimes \text{grad} f \cdot E_j \cdot \Psi = \\ &= -\sum_j \nabla_j^{Cl} (\text{grad} f \cdot E_j \cdot \Psi) = \\ &= -\sum_j \{ \nabla_j \text{grad} f \cdot E_j \cdot \Psi + \text{grad} f \cdot E_j \cdot \nabla_j^{Cl} \Psi \} = \\ &= -\sum_{ij} \langle \nabla_j \text{grad} f, E_i \rangle E_i E_j \Psi - \text{grad} f \cdot D \Psi = \\ &= -\Delta_0 f \cdot \Psi - \gamma_{\text{grad} f} \cdot D \Psi. \blacksquare \end{aligned}$$

LEMMA 1.6. Sei $\tilde{\nabla}$ ein beliebiger Zusammenhang auf V . Wir verlangen nicht, daß $\tilde{\nabla}$ metrisch ist. Dann gilt für jede Funktion $f \in C^1(M, \mathbb{R})$:

a) $\tilde{\nabla} \cdot f = f \cdot \tilde{\nabla} + \tau_{\text{grad} f}$

b) $\tilde{\nabla}^* \cdot f = f \cdot \tilde{\nabla}^* - \iota_{\text{grad} f}.$

$$\begin{aligned} \text{BEWEIS: a) } \tilde{\nabla} \cdot f(\Psi) &= \sum_j E_j^* \otimes \tilde{\nabla}_j(f\Psi) = \\ &= \sum_j E_j^* \otimes \{ \partial_j f \cdot \Psi + f \tilde{\nabla}_j \Psi \} = \\ &= \tau_{\text{grad} f} \Psi + f \cdot \tilde{\nabla}(\Psi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (\tilde{\nabla}^* (f\Psi), \Phi) &= (\Psi, f \tilde{\nabla}^* \Phi) = \\ &= (\Psi, \{ \tilde{\nabla} \cdot f - \tau_{\text{grad} f} \} \Phi) = \\ &= (\{ f \cdot \tilde{\nabla}^* - \iota_{\text{grad} f} \} \Psi, \Phi). \blacksquare \end{aligned}$$

Sei nun λ der betragsmäßig kleinste Eigenwert des Dirac-Operators D . Der Beweis von Friedrichs Ungleichung beruhte auf dem Studium des

Zusammenhangs $\nabla^{Cl} + (\lambda/n) \gamma$. Wir machen einen allgemeineren Ansatz. Dazu sei eine Funktion $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fest vorgegeben, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Wir definieren:

$$\tilde{\nabla} = \nabla^{Cl} + (\lambda/n) \gamma + \mu \gamma_{\text{grad} f} + \nu \tau_{\text{grad} f}.$$

LEMMA 1.7. Für den Zusammenhangs-Laplace-Operator $\tilde{\nabla}^* \tilde{\nabla}$ gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}^* \tilde{\nabla} = & D^2 - K - 2(\lambda/n)D + \lambda^2/n + (n\mu^2 - 2\mu\nu + \nu^2)|\text{grad} f|^2 + \\ & + 2\mu \gamma_{\text{grad} f} D + 2\mu \nabla_{\text{grad} f}^{Cl} - \mu \Delta_o f + \nu [\nabla_{\text{grad} f}^{Cl} + (\nabla_{\text{grad} f}^{Cl})^*]. \end{aligned}$$

BEWEIS: Im folgenden machen wir freien Gebrauch von Lemma 1.4 bis 1.6. Für $\tilde{\nabla}^*$ gilt:

$$\tilde{\nabla}^* = (\nabla^{Cl})^* + (\lambda/n) \gamma^* - \mu \gamma_{\text{grad} f} \gamma^* + \nu \tau_{\text{grad} f}.$$

Also folgt $\tilde{\nabla}^* \tilde{\nabla} =$

$$\begin{aligned} = & ((\nabla^{Cl})^* + (\lambda/n) \gamma^* - \mu \gamma_{\text{grad} f} \gamma^* + \nu \tau_{\text{grad} f}) \cdot \\ & \cdot (\nabla^{Cl} + (\lambda/n) \gamma + \mu \gamma_{\text{grad} f} + \nu \tau_{\text{grad} f}) = \\ = & (\nabla^{Cl})^* \nabla^{Cl} - (\lambda/n) D - \mu D \gamma_{\text{grad} f} + \nu (\nabla^{Cl})^* \tau_{\text{grad} f} - (\lambda/n) D + (\lambda/n)^2 n + \\ & + (\lambda/n) \mu n \gamma_{\text{grad} f} + (\lambda/n) \nu \gamma^* \tau_{\text{grad} f} + \mu \gamma_{\text{grad} f} D - \mu (\lambda/n) \gamma_{\text{grad} f} n - \\ & - \mu^2 n \gamma_{\text{grad} f}^2 - \mu \nu \gamma_{\text{grad} f} \gamma^* \tau_{\text{grad} f} + \nu \nabla_{\text{grad} f}^{Cl} + (\lambda/n) \nu \gamma_{\text{grad} f} + \mu \nu \gamma_{\text{grad} f}^2 + \\ & + \nu^2 |\text{grad} f|^2 = \\ = & D^2 - K - 2(\lambda/n)D + \lambda^2/n + (n\mu^2 - 2\mu\nu + \nu^2)|\text{grad} f|^2 - \\ & - \mu (- \gamma_{\text{grad} f} D - 2 \nabla_{\text{grad} f}^{Cl} + \Delta_o f) + \mu \gamma_{\text{grad} f} D + \nu (\nabla_{\text{grad} f}^{Cl} + (\nabla_{\text{grad} f}^{Cl})^*). \blacksquare \end{aligned}$$

Was uns eigentlich interessiert ist nicht der Zusammenhangs-Laplace-Operator, sondern der folgende Operator in „Divergenz-Form“:

LEMMA 1.8. $\tilde{\nabla}^* \cdot e^{2\mu f} \cdot \tilde{\nabla} =$

$$\begin{aligned} = & e^{2\mu f} \{ D^2 - K - 2(\lambda/n)D + \lambda^2/n + [(n+2)\mu^2 - 4\mu\nu + \nu^2]|\text{grad} f|^2 - \\ & - \mu \Delta_o f + 2\mu \gamma_{\text{grad} f} D - 2\mu (\lambda/n) \gamma_{\text{grad} f} + \nu [\nabla_{\text{grad} f}^{Cl} + (\nabla_{\text{grad} f}^{Cl})^*] \}. \end{aligned}$$

BEWEIS: $\tilde{\nabla}^* \cdot e^{2\mu f} \cdot \tilde{\nabla} =$

$$\begin{aligned} = & e^{2\mu f} \tilde{\nabla}^* \tilde{\nabla} - \text{grade}^{2\mu f} \tilde{\nabla} = \\ = & e^{2\mu f} \tilde{\nabla}^* \tilde{\nabla} - 2\mu e^{2\mu f} \tilde{\nabla}_{\text{grad} f}. \end{aligned}$$

Nun muß nur noch Lemma 1.7 für $\tilde{\nabla}^* \tilde{\nabla}$ und die Definition für $\tilde{\nabla}_{\text{grad} f}$ eingesetzt werden. ■

Nun kommen wir zum Schlüsselresultat dieses Abschnitts. Wir wollen nicht länger voraussetzen, daß die untere Schranke κ von K konstant ist, d.h. ab jetzt ist $\kappa \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ und in jedem Punkt von M gilt $K \geq \kappa$.

SATZ 1.9. Für jede glatte Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{n-1} \min_M \{ \kappa + \Delta_o f - \frac{n-2}{n-1} |\text{grad} f|^2 \}.$$

BEWEIS: Sei Ψ ein Eigenspinorfeld von D zum Eigenwert λ . Unter Benutzung von Lemma 1.8 erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 & \leq \|e^{\mu f} \tilde{\nabla} \Psi\|^2 = \\ & = (\tilde{\nabla}^* e^{2\mu f} \tilde{\nabla} \Psi, \Psi) \leq \\ & \leq \int_M e^{2\mu f} \{ \lambda^2 |\Psi|^2 - \kappa |\Psi|^2 - 2(\lambda/n) \lambda |\Psi|^2 + (\lambda^2/n) |\Psi|^2 + [(n+2)\mu^2 - \\ & - 4\mu\nu + \nu^2] |\text{grad} f|^2 |\Psi|^2 - \mu \Delta_o f |\Psi|^2 + 2\mu \lambda \langle \text{grad} f, \Psi, \Psi \rangle - \\ & - 2\mu (\lambda/n) \langle \text{grad} f, \Psi, \Psi \rangle + \nu [\langle \nabla_{\text{grad} f}^{Cl} \Psi, \Psi \rangle + \langle (\nabla_{\text{grad} f}^{Cl})^* \Psi, \Psi \rangle] \}. \end{aligned}$$

Zum letzten Summanden:

$$\begin{aligned}
& \int_M e^{2\mu f} [\langle \nabla_{\text{grad} f}^{\text{Cl}} \Psi, \Psi \rangle + \langle (\nabla_{\text{grad} f}^{\text{Cl}})^* \Psi, \Psi \rangle] = \\
& = (\nabla_{\text{grad} f}^{\text{Cl}} \Psi, e^{2\mu f} \Psi) + ((\nabla_{\text{grad} f}^{\text{Cl}})^* \Psi, e^{2\mu f} \Psi) = \\
& = (\nabla_{\text{grad} f}^{\text{Cl}} \Psi, e^{2\mu f} \Psi) + (\Psi, \nabla_{\text{grad} f}^{\text{Cl}} (e^{2\mu f} \Psi)) = \\
& = \int_M \langle \text{grad} f, \text{grad} \langle \Psi, e^{2\mu f} \Psi \rangle \rangle = \\
& = \int_M \Delta_0 f \cdot e^{2\mu f} |\Psi|^2 .
\end{aligned}$$

Der Term $\langle \text{grad} f \cdot \Psi, \Psi \rangle$ ist rein imaginär, alle anderen sind reell, also fällt er weg. Es folgt

$$0 \leq \int_M |e^{\mu f} \Psi|^2 (\lambda^2 - 2(\lambda^2/n) + \lambda^2/n - \kappa + ((n+2)\mu^2 - 4\mu\nu + \nu^2) |\text{grad} f|^2 - (\mu - \nu) \Delta_0 f) .$$

Also gibt es einen Punkt $p \in M$, in dem gilt

$$\lambda^2 \cdot \frac{n-1}{n} \geq \kappa(p) - ((n+2)\mu^2 - 4\mu\nu + \nu^2) |\text{grad} f(p)|^2 + (\mu - \nu) \Delta_0 f(p) .$$

Wir setzen nun $\mu := -\frac{1}{n-1}$, $\nu := \mu - 1$. Dann ist $\mu - \nu = 1$ und

$$(n+2)\mu^2 - 4\mu\nu + \nu^2 = \frac{n-2}{n-1} .$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. ■

Wir betrachten zunächst den Fall $n = 2$, für den der unangenehme Term $\frac{n-2}{n-1} |\text{grad} f|^2$ wegfällt.

SATZ 1.10. Sei M homöomorph zu S^2 .

Für alle Eigenwerte λ des klassischen Dirac-Operators gilt

$$\lambda^2 \geq \frac{4\pi}{\text{area}(M)} .$$

Bemerkung. Diese Abschätzung kontrastiert zu Herschs oberer Abschätzung für den kleinsten positiven Δ_0 -Eigenwert λ_1 auf Flächen vom Geschlecht 0, nämlich $\lambda_1 \leq \frac{8\pi}{\text{area}(M)}$, siehe [Her].

BEWEIS von Satz 1.10: Satz 1.9 besagt für $n = 2$ und jeden Eigenwert λ eines Dirac-Operators D , daß

$$\lambda^2 \geq 2 \min_M \{ \kappa + \Delta_0 f \}, \quad f \in C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

Wir subtrahieren von κ den „konstanten Anteil“, d.h. wir setzen

$$h(x) := \kappa(x) - (1/A) \int_M \kappa(y) dy, \quad A = \text{area}(M).$$

Nun steht h L^2 -senkrecht auf den konstanten Funktionen, d.h. auf dem Kern von Δ_0 . Nach der Fredholm-Alternative gibt es ein $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $\Delta_0 f = -h$. Setzen wir dieses f in die obige Abschätzung ein, erhalten wir

$$\lambda^2 \geq (2/A) \int_M \kappa(y) dy .$$

Für den klassischen Dirac-Operator nehmen wir $\kappa := K = S/4$, wobei S die Skalarkrümmung ist. Ist K die Gaußkrümmung, so gilt daher $\kappa = \frac{1}{2} K$. Der Satz von Gauß-Bonnet liefert nun

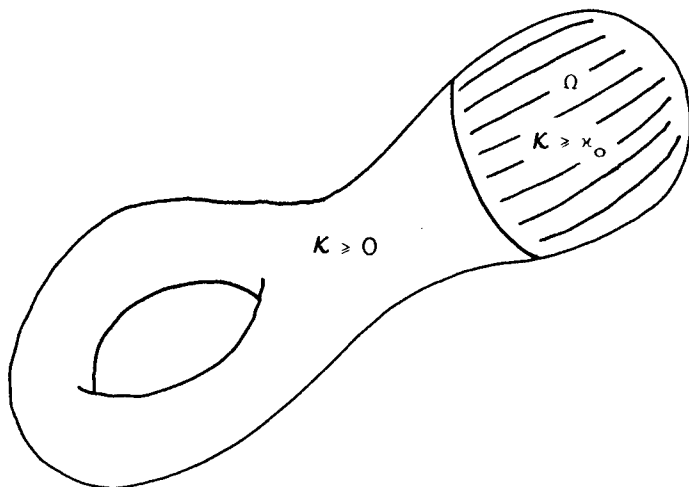
$$2 \int_M \kappa(y) dy = \int_M K(y) dy = 2\pi \chi(S^2) = 4\pi. \blacksquare$$

Bemerkung. Satz 1.10 ist scharf für die Metrik konstanter Krümmung.

KOROLLAR 1.11. Ist M homöomorph zu S^2 , dann gibt es niemals harmonische Spinorfelder auf M . ■

Man beachte, daß es auf der S^3 durchaus Metriken gibt, die harmonische Spinorfelder zulassen, siehe Abschnitt II.6.

Soviel zum Fall $n = 2$. Als nächstes studieren wir für $n \geq 3$ folgende Situation. Auf M soll $K \geq 0$ sein, auf einem Teilgebiet $\Omega \subset M$ soll $K \geq x_0 > 0$ sein.



Nach der Weitzenböck-Formel gibt es auf M keine harmonischen Schnitte. Wir wollen nun eine geometrische untere Schranke für das Spektrum finden.

Sei $x \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ so, daß in jedem Punkt $K \geq x$ gilt, $x \geq 0$ überall, $x \geq x_0$ auf Ω . Sei $\Omega_j, j \in \mathbb{N}$, eine Ausschöpfung von Ω , d.h. $\Omega_j \subset \subset \Omega, \Omega_j \subset \Omega_{j+1}, \bigcup \Omega_j = \Omega$. Wir setzen

$$v_j := \frac{\text{vol}(M - \Omega)}{\text{vol}(\Omega_j)}, \quad v := \frac{\text{vol}(M - \Omega)}{\text{vol}(\Omega)}.$$

Wir halten jetzt j fest. Wir konstruieren $h = h_j \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ wie folgt: Auf $M - \Omega$ sei $h \equiv 1$, auf Ω_j sei $h \equiv -v_j$. Dann ist

$$\int_{M - \Omega} h = \text{vol}(M - \Omega) = - \int_{\Omega_j} h.$$

Wir können h zu einer C^∞ -Funktion auf M mit folgenden Eigenschaften fortsetzen: (i) $\int_M h = 0$

$$(ii) \quad -v_j \leq h \leq 1 \quad \text{auf } M.$$

Wegen (i) gibt es ein $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $\Delta_\Omega g = h$. Sei $c > 0$. Wir setzen $f := cg$ in die Abschätzung aus Satz 1.9 ein:

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{n-1} \min_M \{ ch + x - \frac{n-2}{n-1} c^2 |\text{grad} g|^2 \}.$$

Sei $G(x, y)$ eine Greensche Funktion auf M . Dann gilt:

$$g(x) = \int_M G(x, y) h(y) dy.$$

$$\text{Es folgt} \quad |\text{grad} g(x)| \leq \|h\|_{C^0} \cdot \int_M |\text{grad}_x G(x, y)| dy.$$

Wir nehmen nun an, daß $\int_M |\text{grad}_x G(x, y)| dy \leq A$ für alle $x \in M$.

Es folgt für alle $x \in M$: $|\text{grad} g(x)| \leq (v_j + 1) A$, und daher

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{n-1} \min_M \{ ch + x - \frac{n-2}{n-1} c^2 A^2 (v_j + 1)^2 \}.$$

Auf $M - \Omega$ gilt:

$$\{ ch + x - \frac{n-2}{n-1} c^2 A^2 (v_j + 1)^2 \} \geq c - \frac{n-2}{n-1} c^2 A^2 (v_j + 1)^2 =: \Phi_1(c).$$

Auf Ω gilt:

$$\{ ch + x - \frac{n-2}{n-1} c^2 A^2 (v_j + 1)^2 \} \geq -cv_j + x_0 - \frac{n-2}{n-1} c^2 A^2 (v_j + 1)^2 =: \Phi_2(c).$$

Jetzt wollen wir c optimal wählen.

Die Parabel Φ_1 nimmt ihr Maximum in $c_1 = \frac{n-1}{2(n-2)A^2(v_j+1)^2}$ an und es gilt $\Phi_1(0) = 0$.

Für Φ_2 gilt $\Phi_2(0) = x_0 > 0$, $\Phi_2'(c) < 0$ für $c > 0$ und $\lim_{c \rightarrow \infty} \Phi_2(c) = -\infty$.

Der Schnittpunkt von Φ_1 und Φ_2 ist $c_2 = \frac{x_0}{v_j+1}$.

1. Fall: $c_1 \leq c_2$

In diesem Fall ist $\Phi_2(c_1) \geq \Phi_1(c_1) = \frac{n-1}{4(n-2)A^2(v_j+1)^2} = \frac{1}{2} c_1$.

2. Fall: $c_1 > c_2$

Diese Ungleichung bedeutet $v_j + 1 \geq 2 \frac{n-2}{n-1} A^2 (v_j+1)^2 x_0$.

Es folgt $\Phi_2(c_2) = \Phi_1(c_2) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{x_0}{v_j+1} - \frac{(n-2)A^2(v_j+1)^2 x_0^2}{(n-1)(v_j+1)^2} \geq \\ &\geq \frac{x_0}{v_j+1} - \frac{(v_j+1)x_0}{2(v_j+1)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{x_0}{v_j+1} = \frac{1}{2} c_2. \end{aligned}$$

In jedem Fall können wir c so wählen, daß

$$\begin{aligned} \Phi_2(c) \geq \Phi_1(c) \geq \frac{1}{2} \min \{c_1, c_2\} = \\ = \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{n-1}{2(n-2)A^2(v_j+1)^2}, \frac{x_0}{v_j+1} \right\}. \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $j \rightarrow \infty$ liefert

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{n-1} \min \left\{ \frac{n-1}{4(n-2)A^2(v+1)^2}, \frac{x_0}{2(v+1)} \right\}.$$

$$\text{Es gilt } v+1 = \frac{\text{vol}(M-\Omega)}{\text{vol}(\Omega)} + 1 = \frac{\text{vol}(M)}{\text{vol}(\Omega)}.$$

Also gilt

$$\lambda^2 \geq \min \left\{ \frac{n \text{vol}(\Omega)^2}{4(n-2)A^2 \text{vol}(M)^2}, \frac{n x_0 \text{vol}(\Omega)}{2(n-1) \text{vol}(M)} \right\}.$$

Es ist nun noch die Schranke A an den Gradienten der Greenschen Funktion zu kontrollieren. Aubin hat in [Aub1, Prop. 7] gezeigt, daß es eine Schranke $A = A(n, a, b, \delta, R)$ gibt, so daß für die Greenschen

Funktionen auf n -dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit

- (i) $\text{Ric} \geq a, a \in \mathbb{R}$
- (ii) $K \leq b, b \in \mathbb{R}$
- (iii) $\text{injrad} \geq \delta, \delta \in \mathbb{R}^+$
- (iv) $\text{diam} \leq R, R \in \mathbb{R}^+$

$$\text{gilt} \quad \int_M |\text{grad}_x G(x, y)| dy \leq A.$$

Wir fassen zusammen:

SATZ 1.12. Sei M eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$. Für die Riccikrümmung, die Schnittkrümmung, den Injektivitätsradius und den Durchmesser gelte

- (i) $\text{Ric} \geq a, a \in \mathbb{R}$
- (ii) $K \leq b, b \in \mathbb{R}$
- (iii) $\text{injrad} \geq \delta, \delta \in \mathbb{R}^+$
- (iv) $\text{diam} \leq R, R \in \mathbb{R}^+.$

Ferner sei Ω eine offene Teilmenge von M , D ein Dirac-Operator auf M , λ ein Eigenwert von D . Für den Krümmungsendomorphismus K von D gelte $K \geq 0$ auf M , $K \geq x_0 > 0$ auf Ω .

Dann gibt es eine Schranke $C = C(n, a, b, \delta, R)$, so daß gilt

$$\lambda^2 \geq \min \left\{ \frac{\text{vol}(\Omega)^2}{C \cdot \text{vol}(M)^2}, \frac{n x_0 \text{vol}(\Omega)}{2(n-1) \text{vol}(M)} \right\}. \blacksquare$$

Man beachte, daß die Schranke C nicht davon abhängt, welchen Dirac-Operator wir betrachten.

Bemerkung. Setzen wir für $n \geq 3$ und eine positive Funktion $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ die Funktion $f = \frac{n-1}{n-2} \ln h$ in Satz 1.9 ein, so ergibt eine kurze Rechnung

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{n-1} \min_M \left\{ \kappa + \frac{1}{h} \frac{n-1}{n-2} \Delta_0 h \right\}.$$

Hijazi hat diese Ungleichung im Fall des klassischen Dirac-Operators mit anderen Methoden hergeleitet. Er benutzte wesentlich eine konforme Änderung der Riemannschen Metrik auf M . Unser Verfahren hat den Vorteil, daß es für alle Dirac-Operatoren funktioniert, und daß auch der Fall $n = 2$ behandelt werden kann, vgl. Satz 1.10. Hijazis Verfahren eignet sich möglicherweise besser zur Gleichheitsdiskussion.

Aus obiger Ungleichung folgt für den klassischen Dirac-Operator direkt Hijazis Ungleichung 1.3, indem man für h eine Eigenfunktion des Yamabe-Operators zum kleinsten Eigenwert einsetzt.

Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir noch das Dirichlet-Randwertproblem für das Quadrat eines Dirac-Operators studieren.

Sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit glattem Rand ∂M . Es sei V ein Clifford-Bündel über M mit Clifford-Zusammenhang ∇^{Cl} und Dirac-Operator D . Für den Krümmungsendomorphismus gelte $K \geq \kappa_0$, $\kappa_0 \in \mathbb{R}$. Ferner sei $\lambda_1(D^2)$ der kleinste Dirichlet-Eigenwert von D^2 auf M , $\lambda_1(\Delta_0)$ entsprechend für Δ_0 .

SATZ 1.13. *Es gilt:* $\lambda_1(D^2) \geq \lambda_1(\Delta_0) + \kappa_0$.

BEWEIS: Sei Ψ ein Eigenspinorfeld von D^2 zum Eigenwert $\lambda_1(D^2)$ mit der Randbedingung $\Psi|_{\partial M} = 0$. Die Beweisidee besteht darin, die Funktion $|\Psi|$ in den Rayleigh-Quotienten für Δ_0 einzusetzen. Da wir in den Nullstellen von Ψ Regularitätsprobleme für $|\Psi|$ bekommen, machen wir vorher einige Regularisierungen.

Wir wählen eine Folge $\Psi_i \in C_c^\infty(M, V)$, so daß Ψ_i in der $W^{1,2}$ -Topologie

gegen Ψ konvergiert. Für jedes i gibt es ein $\varepsilon(i) > 0$, so daß Ψ_i in der $\varepsilon(i)$ -Umgebung des Randes ∂M verschwindet.

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir eine Funktion $\Phi_\varepsilon \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit

- (i) Es verschwindet Φ_ε auf dem Rand ∂M .
- (ii) Außerhalb der ε -Umgebung des Randes ist Φ_ε konstant gleich 1.
- (iii) Überall gilt $0 \leq \Phi_\varepsilon \leq 1$.
- (iv) Für die Ableitung von Φ_ε gilt überall $|d\Phi_\varepsilon| \leq 2/\varepsilon$.

Für ε zwischen 0 und $\varepsilon(i)$ setzen wir

$$f_{i\varepsilon} := \Phi_\varepsilon \cdot (|\Psi_i|^2 + \varepsilon^2)^{1/2} \in C_c^\infty(M, \mathbb{R}).$$

Es gilt $\|f_{i\varepsilon}\| \rightarrow \|\Psi_i\|$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. Wir schreiben kurz $\nabla = \nabla^{\text{Cl}}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \|df_{i\varepsilon}\|^2 &= \int_M \left((|\Psi_i|^2 + \varepsilon^2)^{1/2} \cdot d\Phi_\varepsilon + \Phi_\varepsilon \cdot \frac{\text{Re} \langle \nabla \Psi_i, \Psi_i \rangle}{(|\Psi_i|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \right)^2 \leq \\ &\leq \int_M \left\{ (|\Psi_i|^2 + \varepsilon^2)^{1/2} \cdot |d\Phi_\varepsilon| + \frac{|\nabla \Psi_i| \cdot |\Psi_i|}{(|\Psi_i|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \right\}^2 \leq \\ &\leq \int_{B_\varepsilon(\partial M)} \left\{ (|\Psi_i|^2 + \varepsilon^2) |d\Phi_\varepsilon|^2 + 2 |d\Phi_\varepsilon| |\nabla \Psi_i| \cdot |\Psi_i| \right\}^2 + \\ &\quad + \int_M |\nabla \Psi_i|^2 \cdot \frac{|\Psi_i|^2}{|\Psi_i|^2 + \varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Da Ψ_i auf $B_\varepsilon(\partial M)$ verschwindet und da $\frac{|\Psi_i|^2}{|\Psi_i|^2 + \varepsilon^2} \leq 1$ ist, folgt

$$\|df_{i\varepsilon}\|^2 \leq 4 \text{vol}(B_\varepsilon(\partial M)) + \|\nabla \Psi_i\|^2.$$

Aus $\lambda_1(\Delta_0) \leq \frac{\|df_{i\varepsilon}\|^2}{\|f_{i\varepsilon}\|^2}$ folgt nach dem Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\lambda_1(\Delta_0) \leq \frac{\|\nabla \Psi_i\|^2}{\|\Psi_i\|^2}, \text{ und schließlich nach dem Grenzübergang } i \rightarrow \infty$$

$$\lambda_1(\Delta_0) \leq \frac{\|\nabla \Psi\|^2}{\|\Psi\|^2}.$$

Unter Benutzung der Weitzenböck-Formel erhalten wir

$$\lambda_1(D^2) = \frac{\|D\Psi\|^2}{\|\Psi\|^2} = \frac{\|\nabla\Psi\|^2}{\|\Psi\|^2} + \frac{(K\Psi, \Psi)}{\|\Psi\|^2} \geq \lambda_1(\Delta_0) + \kappa_0. \blacksquare$$

KOROLLAR 1.14. Ist D der klassische Dirac-Operator, und gilt für die Skalkrümmung $S \geq S_0$, $S_0 \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\lambda_1(D^2) \geq \lambda_1(\Delta_0) + \frac{1}{4} S_0. \blacksquare$$

KOROLLAR 1.15. Gilt für die Riccikrümmung $\text{Ric} \geq \rho$, $\rho \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\lambda_1(\Delta_1) \geq \lambda_1(\Delta_0) + \rho. \blacksquare$$

2. OBERE SCHRANKEN

Sei zunächst M eine geschlossene Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit, ΣM das Spinorbündel, D der klassische Dirac-Operator, E ein Hermite-sches Koeffizientenbündel, D^E der getwistete Dirac-Operator auf $\Sigma M \otimes E$. Vafa und Witten haben in [Va-Wil] gezeigt, daß die Eigenwerte von D^E nach oben durch Schranken abgeschätzt werden können, die nur von der Geometrie von M abhängen, nicht aber vom Koeffizientenbündel E . siehe auch [At]. Bemerkenswerterweise ist der Beweis rein topologisch, die wesentliche Zutat ist der Atiyah-Singer-Indexsatz.

Es handelt sich aber leider um eine reine Existenzaussage, es wird keine Aussage darüber gemacht, wie die Schranken aussehen. Baum hat mit denselben Methoden in [Bau4] die oberen Schranken für den klassischen Dirac-Operator konkreter gemacht.

Wir ordnen die Eigenwerte von D nach aufsteigenden Beträgen

$$0 = |\lambda_0| < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots$$

und bezeichnen mit m_j die Summe der Multiplizitäten von λ_j und $-\lambda_j$. Baums Hauptsatz lautet dann

SATZ 2.1. (Baum)

Sei M von gerader Dimension $n = 2m$, sei $f : M \rightarrow S^{2m}$ eine glatte Abbildung vom Grad $\deg f \geq 2^{m-1}(m_0 + \dots + m_{k-1}) + 1$. Dann gilt

$$|\lambda_k| \leq 2^{m-1} \sqrt{m} \|df\|_{C^0}. \blacksquare$$

Daraus folgert sie

SATZ 2.2. (Baum)

Ist M von der Dimension n , $n = 2m$ oder $n = 2m-1$, und hat M

positive Skalarkrümmung, dann gilt für den betragsmäßig kleinsten Eigenwert λ des klassischen Dirac-Operators D :

$$(i) \quad |\lambda| \leq 2^{m-1} \sqrt{m} \min_{p \in M} \sqrt{\kappa(p)} \leq 2^{m-1} \sqrt{m} \max \left\{ \sqrt{K}, \frac{\pi}{\text{injrad}} \right\},$$

wobei K die Schnittkrümmung ist, und $\kappa(p) = \max \left\{ K|B_{\text{injrad}(p)}(p), \frac{\pi^2}{\text{injrad}(p)^2} \right\}$.

(ii) Ist $n = 2m$ und $0 < K \leq K_{\max}$, dann gilt

$$|\lambda| \leq 2^{m-1} \sqrt{m} \sqrt{K_{\max}}.$$

(iii) Ist M einfach zusammenhängend, $n = 2m-1$, und $0 < \frac{1}{4}k < K \leq k$, dann

$$|\lambda| \leq 2^{m-1} \sqrt{m} \sqrt{k}. \blacksquare$$

Bemerkung. Satz 2.2 (ii) ist scharf für die runde S^2 . Wir werden im folgenden eine obere Abschätzung herleiten, die für alle runden Sphären scharf ist. Doch zuvor geben wir noch eine weitere hübsche Konsequenz aus Satz 2.1 an.

SATZ 2.3. (Baum)

Ist $M \subset \mathbb{R}^3$ eine geschlossene orientierte Fläche vom Geschlecht $g \neq 1$, ist $H(p)$ die mittlere Krümmung von M in $p \in M$, dann gilt für den betragsmäßig kleinsten Eigenwert λ von D :

$$|\lambda| \leq c(g) \cdot \max_{p \in M} |H(p)|,$$

wobei

$$c(g) = \begin{cases} 1, & \text{falls } g = 0 \\ 3, & \text{falls } g = 2 \text{ oder } 3 \\ 2, & \text{falls } g \geq 4. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Auch diese Abschätzung ist scharf für die Standard-Sphäre.

Wir verwenden eine völlig andere Methode für unsere oberen Eigenwertabschätzungen. Zunächst studieren wir das Dirichlet-Randwertproblem für D^2 auf sternförmigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, anschließend wenden wir die Resultate auf geodätische Bälle in geschlossenen Mannigfaltigkeiten an und erhalten wegen des Prinzips der Gebietsmonotonie obere Abschätzungen auch für den geschlossenen Fall.

Sei nun M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit glattem Rand ∂M , sei $p \in \dot{M}$, für die Schnittkrümmung gelte $K \leq \kappa_1$. Es soll M sternförmig bzgl. p sein, d.h. es gebe eine bzgl. O sternförmige Teilmenge $M' \subset T_p M$, so daß $\exp_p: M' \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus ist. Ferner gelte für $\delta = \max \{ d(p, x) \mid x \in M \}$, daß $\delta \leq \pi/\sqrt{\kappa_1}$, falls $\kappa_1 > 0$.

Es sei V ein Clifford-Bündel über M mit Clifford-Zusammenhang ∇^{Cl} und Dirac-Operator D . Ferner betrachten wir ein beliebiges glattes Endomorphismenfeld $T \in C^\infty(M, \text{End}(TM, TM))$, welches der Abschätzung $|T| \leq T_1 \in \mathbb{R}$ genüge.

Wir bilden den Zusammenhang $\tilde{\nabla}_X \psi = \nabla_X^{\text{Cl}} \psi + T(X) \cdot \psi$. Da die Clifford-Multiplikation mit reellen Vektoren schiefsymmetrisch ist, ist der Zusammenhang $\tilde{\nabla}$ metrisch.

Es sei $\tilde{R}$ der Krümmungstensor zum Zusammenhang $\tilde{\nabla}$ und es gelte $|\tilde{R}| \leq \tilde{R}_1 \in \mathbb{R}$.

Zu einem $\psi_0 \in V(p)$ der Länge 1 erhalten wir einen glatten Schnitt ψ auf M , indem wir ψ_0 längs der von p ausgehenden radialen Geodätischen bzgl. $\tilde{\nabla}$ parallelverschieben. Da $\tilde{\nabla}$ metrisch ist, gilt $|\psi| = 1$.

Als erstes wollen wir $|D\psi|$ nach oben abschätzen, doch zuvor noch einige Notationen. Zu $x \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$s_x(t) = \begin{cases} (1/\sqrt{x}) \cdot \sin(\sqrt{x} t) & , \text{ falls } x > 0 \\ t & , \text{ falls } x = 0 \\ (1/\sqrt{-x}) \cdot \sinh(\sqrt{-x} t) & , \text{ falls } x < 0 \end{cases}$$

$$c_x(t) := \begin{cases} \cos(\sqrt{x} t) & , \text{ falls } x > 0 \\ 1 & , \text{ falls } x = 0 \\ \cosh(\sqrt{-x} t) & , \text{ falls } x < 0 \end{cases}$$

$$f_x(t) := \begin{cases} \frac{1 - c_x(t)}{x s_x(t)} & , \text{ falls } x \neq 0 \\ t/2 & , \text{ falls } x = 0 \end{cases} .$$

LEMMA 2.4. *Sei c eine normale Geodätische mit $c(0) = p$. Dann gilt:*

$$|D\Psi(c(r))| \leq n T_1 + (n-1) \tilde{R}_1 f_{x_1}(r) .$$

BEWEIS: Die Ableitung in radialer Richtung abzuschätzen ist einfach, denn

$$|\nabla_{\dot{c}(r)}^{CI} \Psi| = |T(\dot{c}(r)) \cdot \Psi(c(r))| \leq T_1 .$$

Um die sphärischen Richtungen zu kontrollieren, betrachten wir zu $E \perp \dot{c}(0)$ die Familie c_s von radialen Geodätischen mit $\frac{\nabla}{\partial s} \dot{c}_s(0)|_{s=0} = E$, d.h. $\dot{c}_s(0) = \cos(s) \dot{c}(0) + \sin(s) E$.

Sei $J(r) = \frac{\partial}{\partial s} c_s(r)|_{s=0}$ das zugehörige Jacobi-Feld. Es gilt

$$J(0) = 0, \quad \frac{\nabla}{dr} J(0) = E \text{ und } J(r) \perp \dot{c}(r) \text{ für alle } r .$$

Wir setzen $\chi(r) := \tilde{\nabla}_{J(r)} \Psi(c(r)) = \frac{\tilde{\nabla}}{\partial s} \Psi(c_s(r))|_{s=0}$. Dann gilt

$$\frac{\tilde{\nabla}}{dr} \chi(r) = \frac{\tilde{\nabla}}{\partial r} \frac{\tilde{\nabla}}{\partial s} \Psi(c_s(r))|_{s=0} =$$

$$= \hat{R}(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial s}) \Psi(c(r)) + \frac{\tilde{\nabla}}{\partial s} \frac{\tilde{\nabla}}{\partial r} \Psi(c_s(r))|_{s=0} =$$

$$= \tilde{R}(\dot{c}(r), J(r)) \Psi(c(r)) .$$

Wir setzen $f(r) := |\chi(r)|$. Dann gilt für r mit $\chi(r) \neq 0$:

$$2 f(r) \dot{f}(r) = \frac{d}{dr} (f(r)^2) =$$

$$= 2 \operatorname{Re} \left\langle \frac{\tilde{\nabla}}{dr} \chi(r), \chi(r) \right\rangle =$$

$$= 2 \operatorname{Re} \left\langle \tilde{R}(\dot{c}(r), J(r)) \Psi(c(r)), \chi(r) \right\rangle \leq$$

$$\leq 2 \tilde{R}_1 \cdot |J(r)| \cdot f(r) \text{ und daher}$$

$$\dot{f}(r) \leq \tilde{R}_1 \cdot |J(r)| .$$

Wir setzen $r_o = r_o(r) := \max \{ u \in [0, r] \mid f(u) = 0 \}$ und erhalten

$$f(r) = \int_{r_o}^r \dot{f}(u) du \leq \tilde{R}_1 \cdot \int_{r_o}^r |J(u)| du \leq \tilde{R}_1 \cdot \int_0^r |J(u)| du .$$

Der Rauchsche Vergleichssatz besagt, daß

$$\frac{|J(u)|}{|J(r)|} \leq \frac{s_{x_1}(u)}{s_{x_1}(r)} \quad \text{für } u \leq r .$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \left| \nabla_{J(r)/|J(r)|}^{CI} \Psi \right| &\leq \left| \tilde{\nabla}_{J(r)/|J(r)|} \Psi \right| + \left| T(J(r)/|J(r)|) \cdot \Psi \right| \leq \\ &\leq (1/|J(r)|) \cdot f(r) + T_1 \leq \end{aligned}$$

$$\leq \tilde{R}_1 \int_0^r \frac{|J(u)|}{|J(r)|} du + T_1 \leq$$

$$\leq \tilde{R}_1 \int_0^r \frac{s_{x_1}(u)}{s_{x_1}(r)} du + T_1 =$$

$$= \tilde{R}_1 \cdot f_{x_1}(r) + T_1 .$$

Daraus folgt

$$|D\Psi| \leq T_1 + (n-1) \{ \tilde{R}_1 \cdot f_{x_1}(r) + T_1 \} =$$

$$= nT_1 + (n-1) \tilde{R}_1 f_{x_1}(r). \blacksquare$$

Seien $0 < \lambda_1^D(D^2, M) < \lambda_2^D(D^2, M) < \dots$ die Dirichlet-Eigenwerte von D^2 auf M , wobei jeder Eigenwert entsprechend seiner Vielfachheit aufgeführt wird, $0 < \lambda_1^D(\Delta_o, M) < \lambda_2^D(\Delta_o, M) < \dots$ analog die Dirichlet-Eigenwerte des Laplace-Beltrami-Operators.

Mit N bezeichnen wir den Rang des Clifford-Bündels V . Es gilt:

SATZ 2.5.

$$\lambda_{jN}^D(D^2, M) \leq \{ \lambda_j^D(\Delta_o, M)^{1/2} + nT_1 + (n-1) \tilde{R}_1 f_{x_1}(s) \}^2,$$

$j = 1, 2, \dots$

BEWEIS: Sei $\psi_1, \dots, \psi_N$ eine Orthonormalbasis von $V(p)$. Indem wir ψ_k für Ψ_o nehmen, erhalten wir glatte Schnitte im Vektorbündel V , die wir wieder mit ψ_k bezeichnen. Da $\tilde{\nabla}$ metrisch ist, sind die Schnitte $\psi_1, \dots, \psi_N$ punktweise orthonormal.

Sei $h_1, h_2, \dots$ eine Orthonormalbasis von $L^2(M, \mathbb{R})$ aus Dirichlet-Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami-Operators Δ_o . Es gilt

$$(h_i \psi_k, h_j \psi_l) = \int_M h_i h_j \langle \psi_k, \psi_l \rangle = \delta_{kl} (h_i, h_j) = \delta_{kl} \delta_{ij}.$$

Somit bilden die $h_i \psi_k$ eine Orthogonalbasis von $L^2(M, V)$. Wir halten nun i und k fest und schreiben $h_i = h$ und $\psi_k = \psi$. Für den Rayleigh-Quotienten zu D^2 erhalten wir

$$\frac{\|D(h\psi)\|^2}{\|h\psi\|^2} = \frac{\|\text{grad} h \cdot \psi + h D\psi\|^2}{\|h\|^2} =$$

$$= \frac{\|\text{grad} h\|^2 + 2 \text{Re}(\text{grad} h \cdot \psi, h D\psi) + \|h D\psi\|^2}{\|h\|^2} \leq$$

$$\leq \lambda_1^D(\Delta_o, M) + 2 \frac{\|\text{grad} h\| \cdot \|D\psi\|_{C^0}}{\|h\|} + \|D\psi\|_{C^0}^2 =$$

$$= \{ \lambda_1^D(\Delta_o, M)^{1/2} + \|D\psi\|_{C^0} \}^2 \leq$$

$$\leq \{ \lambda_1^D(\Delta_o, M)^{1/2} + nT_1 + (n-1) \tilde{R}_1 f_{x_1}(s) \}^2.$$

Es gibt also einen iN -dimensionalen Teilraum von $L^2(M, V)$, auf dem der Rayleigh-Quotient zu D^2 durch obige Schranke abgeschätzt wird. Daraus folgt die Behauptung. ■

Mit $B_{x,s}^n$ bezeichnen wir einen geodätischen Ball vom Radius s im n -dimensionalen Modellraum der konstanten Krümmung x . Ferner sei $\lambda(n, x, s) = \lambda_1^D(\Delta_o, B_{x,s}^n)$ der kleinste Dirichlet-Eigenwert für Δ_o auf $B_{x,s}^n$.

SATZ 2.6. Sei M eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Clifford-Bündel V vom Rang N und Clifford-Zusammenhang ∇^{C^1} . Für den Krümmungstensor R^{C^1} zu ∇^{C^1} gelte die Abschätzung $|R^{C^1}| \leq R_1^{C^1} \in \mathbb{R}$. Für die Schnittkrümmung gelte $K \leq x_1$, für die Ricciskrümmung $\text{Ric} \geq (n-1)x_o$. Dann gilt für die betragsmäßig angeordneten Eigenwerte $\lambda_k(D, M)$ des Dirac-Operators D

$$|\lambda_{jN}(D, M)| \leq$$

$$\leq \min_{p \in M} \inf_{0 < s < \min\{\text{Injrad}(p), \pi/\sqrt{x_1}\}} \{ \lambda_j^D(\Delta_o, B_s(p))^{1/2} + (n-1) R_1^{C^1} f_{x_1}(s) \}.$$

Inbesondere gilt $|\lambda_1(D, M)| \leq \dots \leq |\lambda_N(D, M)| \leq$

$$\leq \min_{p \in M} \inf_{0 < s < \min\{\text{Injrad}(p), \pi/\sqrt{x_1}\}} \{ \lambda(n, x_o, s)^{1/2} + (n-1) R_1^{C^1} f_{x_1}(s) \}.$$

BEWEIS: Wegen der Gebietsmonotonie ist

$$\lambda_{jN}(D, M)^2 = \lambda_{jN}(D^2, M) < \lambda_{jN}^D(D^2, B_\delta(p)).$$

Die erste Behauptung folgt durch Anwendung von Satz 2.5 auf $B_\delta(p)$ mit $T = 0$. Nach einem Satz von Cheng gilt $\lambda_1^D(\Delta_\circ, B_\delta(p)) < \Lambda(n, \kappa_\circ, \delta)$, siehe [Cha, S. 74]. Daraus folgt die zweite Behauptung. ■

Bislang haben wir noch keinen Gebrauch von der Möglichkeit gemacht, den Zusammenhang ∇^{C1} durch geeignete Wahl von T zu modifizieren. Dies werden wir nun in der konkreteren Situation für den klassischen Dirac-Operator tun.

Von nun an sei M eine geschlossene Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit dem Spinorbündel ΣM , dem Spin-Zusammenhang ∇^Σ und dem klassischen Dirac-Operator D . Für die Schnittkrümmung setzen wir $\kappa - \rho_1 < K < \kappa + \rho_2$ voraus, wobei $\rho_1, \rho_2, \kappa > 0$. Für das Endomorphismenfeld T wählen wir $T(X) = \frac{1}{2}\sqrt{\kappa} X$. Dann können wir für T_1 die Schranke $T_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\kappa}$ nehmen.

Um Satz 2.5 anzuwenden, versuchen wir, eine möglichst günstige Schranke $\tilde{R}_1$ für den Krümmungstensor $\tilde{R}$ zum modifizierten Zusammenhang $\tilde{\nabla}$ zu finden, wobei $\tilde{\nabla}_X \Psi = \nabla_X^\Sigma \Psi + \frac{1}{2}\sqrt{\kappa} X \cdot \Psi$.

LEMMA 2.7. $\tilde{R}(X, Y) = R^\Sigma(X, Y) + \frac{1}{4}\kappa(XY - YX).$

BEWEIS: Sei $p \in M$, $X, Y \in T_p M$, $\Psi \in \Sigma_p M$. Wir setzen X, Y und Ψ zu lokalen Schnitten fort, und zwar so, daß $\nabla X(p) = \nabla Y(p) = 0$. Dann gilt in p :

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y) \Psi &= \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \Psi - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X \Psi = \\ &= (\nabla_X^\Sigma + \frac{1}{2}\sqrt{\kappa} X) (\nabla_Y^\Sigma + \frac{1}{2}\sqrt{\kappa} Y) \Psi - \\ &\quad - (\nabla_Y^\Sigma + \frac{1}{2}\sqrt{\kappa} Y) (\nabla_X^\Sigma + \frac{1}{2}\sqrt{\kappa} X) \Psi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \nabla_X^\Sigma \nabla_Y^\Sigma + \frac{1}{2}\sqrt{\kappa} \nabla_X^\Sigma Y + \frac{1}{2}\sqrt{\kappa} Y \nabla_X^\Sigma + \frac{1}{2}\sqrt{\kappa} X \nabla_Y^\Sigma + \frac{1}{4}\kappa XY \right\} \Psi \\ &\quad - \left\{ \nabla_Y^\Sigma \nabla_X^\Sigma + \frac{1}{2}\sqrt{\kappa} \nabla_Y^\Sigma X + \frac{1}{2}\sqrt{\kappa} X \nabla_Y^\Sigma + \frac{1}{2}\sqrt{\kappa} Y \nabla_X^\Sigma + \frac{1}{4}\kappa YX \right\} \Psi \\ &= R^\Sigma(X, Y) \Psi + \frac{1}{4}\kappa(XY - YX) \Psi. \blacksquare \end{aligned}$$

LEMMA 2.8. Sind X und Y orthonormal, so gilt:

$$|\tilde{R}(X, Y)| \leq \frac{1}{2}\rho_{\max} + (n-2) \left((8/3) + (7/12)(n-3) \right) (\rho_1 + \rho_2).$$

BEWEIS: Wir setzen $X = E_1$ und $Y = E_2$ zu einer Orthonormalbasis $E_1, \dots, E_n$ fort. Lemma 1.4.2 sagt, daß

$$R^\Sigma(X, Y) = -\frac{1}{2} \sum_{j < k} \langle R(X, Y) E_k, E_j \rangle E_j E_k.$$

Nach Lemma 2.7 ist

$$\begin{aligned} \tilde{R}(E_1, E_2) &= -\frac{1}{2} K(E_1, E_2) E_1 E_2 - \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \langle R(E_1, E_2) E_k, E_1 \rangle E_1 E_k - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \langle R(E_1, E_2) E_k, E_2 \rangle E_2 E_k - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k > j \geq 3} \langle R(E_1, E_2) E_k, E_j \rangle E_j E_k + \frac{1}{2}\kappa E_1 E_2. \end{aligned}$$

Dabei ist $K(E_1, E_2)$ die Schnittkrümmung auf der von E_1 und E_2 aufgespannten Ebene. Daher ist

$$\begin{aligned} |\tilde{R}(E_1, E_2)| &\leq \frac{1}{2} |K(E_1, E_2) - \kappa| + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n |\langle R(E_1, E_2) E_k, E_1 \rangle| + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n |\langle R(E_1, E_2) E_k, E_2 \rangle| + \frac{1}{2} \sum_{k > j \geq 3} |\langle R(E_1, E_2) E_k, E_j \rangle|. \end{aligned}$$

Der erste Summand wird durch $\frac{1}{2}\rho_{\max}$ abgeschätzt. Um die anderen Summanden abzuschätzen, verwenden wir folgende Formel, die uns sagt, wie man den Krümmungstensor aus der Schnittkrümmung zurückgewinnt.

Für beliebige Vektoren X, Y, W und Z gilt:

$$\begin{aligned}
6 \langle R(X, Y) Z, W \rangle &= K(X+W, Y+Z) |(X+W) \wedge (Y+Z)|^2 \\
&- K(Y+W, X+Z) |(Y+W) \wedge (X+Z)|^2 \\
&- K(X, Y+Z) |X \wedge (Y+Z)|^2 - K(Y, X+W) |Y \wedge (X+W)|^2 \\
&- K(Z, X+W) |Z \wedge (X+W)|^2 - K(W, Y+Z) |W \wedge (Y+Z)|^2 \\
&+ K(X, Y+W) |X \wedge (Y+W)|^2 + K(Y, Z+X) |Y \wedge (Z+X)|^2 \\
&+ K(Z, Y+W) |Z \wedge (Y+W)|^2 + K(W, X+Z) |W \wedge (X+Z)|^2 \\
&+ K(X, Z) |X \wedge Z|^2 + K(Y, W) |Y \wedge W|^2 \\
&- K(X, W) |X \wedge W|^2 - K(Y, Z) |Y \wedge Z|^2.
\end{aligned}$$

Da wir alle Schnittkrümmungsterme durch die gegebenen Schranken abschätzen werden, verzichten wir in den folgenden Rechnungen darauf, genau Buch zu führen, auf welchen Ebenen die Schnittkrümmung jeweils auszuwerten ist.

Für $k \geq 3$ gilt

$$\begin{aligned}
6 \langle R(E_1, E_2) E_k, E_1 \rangle &= 8K(\cdot) - 3K(\cdot) - 2K(\cdot) - 4K(\cdot) - 4K(\cdot) - 2K(\cdot) \\
&+ K(\cdot) + 2K(\cdot) + 2K(\cdot) + K(\cdot) + K(\cdot) + K(\cdot) - \\
&- 0K(\cdot) - K(\cdot).
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
6 \langle R(E_1, E_2) E_k, E_1 \rangle &\leq 16(x + \rho_2) + 16(-x + \rho_1) = 16(\rho_1 + \rho_2), \text{ sowie} \\
6 \langle R(E_1, E_2) E_k, E_1 \rangle &\geq 16(x - \rho_1) + 16(-x - \rho_2) = -16(\rho_1 + \rho_2).
\end{aligned}$$

Es folgt $|\langle R(E_1, E_2) E_k, E_1 \rangle| \leq (8/3)(\rho_1 + \rho_2)$. Genauso erhalten wir

$$|\langle R(E_1, E_2) E_k, E_2 \rangle| \leq (8/3)(\rho_1 + \rho_2),$$

und mit einer ähnlichen Rechnung für $k > j \geq 3$:

$$|\langle R(E_1, E_2) E_k, E_j \rangle| \leq (7/3)(\rho_1 + \rho_2).$$

Einsetzen liefert jetzt die Behauptung. ■

Wir wenden nun Satz 2.5 auf die geodätischen Bälle in M an, wobei wir die Schranke $\tilde{R}_1 = \frac{1}{2}\rho_{\max} + (n-2)\left(\frac{8}{3} + \frac{7}{12}(n-3)\right)(\rho_1 + \rho_2)$ verwenden. Es folgt

$$\begin{aligned}
\lambda_{jN}^D(D^2, B_\delta(p)) &\leq \left\{ \lambda_j^D(\Delta_O, B_\delta(p))^{1/2} + \frac{1}{2}n\sqrt{x} + (n-1)\left[(n-2) \cdot \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \left(\frac{8}{3} + \frac{7}{12}(n-3)\right)(\rho_1 + \rho_2) + \frac{1}{2}\rho_{\max} \right] f_{x+\rho_2}(\delta) \right\}^2.
\end{aligned}$$

SATZ 2.9. Sei M eine geschlossene Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit.

Für die Schnittkrümmung gelte $x - \rho_1 \leq K \leq x + \rho_2$ mit $\rho_1, \rho_2, x \geq 0$. Dann gilt für die betragsmäßig angeordneten Eigenwerte des klassischen Dirac-Operators

$$\begin{aligned}
|\lambda_{jN}(D, M)| &\leq \min_{p \in M} \inf_{0 < \delta < \min(\text{Injrad}(p), \pi/\sqrt{x+\rho_2})} \left\{ \lambda_j^D(\Delta_O, B_\delta(p))^{1/2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}n\sqrt{x} + (n-1)\left[(n-2) \cdot \left(\frac{8}{3} + \frac{7}{12}(n-3)\right)(\rho_1 + \rho_2) + \frac{1}{2}\rho_{\max} \right] f_{x+\rho_2}(\delta) \right\}.
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}
|\lambda_N(D, M)| &\leq \min_{p \in M} \inf_{0 < \delta < \min(\text{Injrad}(p), \pi/\sqrt{x+\rho_2})} \left\{ \Lambda(n, x - \rho_1, \delta)^{1/2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}n\sqrt{x} + (n-1)\left[(n-2) \cdot \left(\frac{8}{3} + \frac{7}{12}(n-3)\right)(\rho_1 + \rho_2) + \frac{1}{2}\rho_{\max} \right] f_{x+\rho_2}(\delta) \right\}.
\end{aligned}$$

Bemerkung. Die letzte Abschätzung ist scharf für die runden Sphären der konstanten Krümmung x . Dann sind nämlich $\rho_1 = \rho_2 = \rho_{\max} = 0$, und die Abschätzung lautet (OBdA $x=1$):

$$|\lambda_N(D, S^n)| \leq \min_{p \in S^n} \inf_{0 < \delta < \pi} \left\{ \Lambda(n, 1, \delta)^{1/2} + \frac{1}{2}n \right\}.$$

Da $\Lambda(n, 1, \delta)$ für $\delta \rightarrow \pi$ gegen 0 konvergiert, lautet die Abschätzung

$$|\lambda_N(D, S^n)| \leq \frac{1}{2}n.$$

In der Tat ist $|\lambda_1(D, S^n)| = \dots = |\lambda_N(D, S^n)| = \frac{1}{2}n$.

3. MODELLRÄUME KONSTANTER KRÜMMUNG

In diesem letzten Abschnitt dieser Arbeit studieren wir das Dirichlet-Randwertproblem für das Quadrat des klassischen Dirac-Operators auf geodätischen Bällen in den Modellräumen konstanter Krümmung. Für den $\mathbb{R}^n$ und den hyperbolischen Raum H^n bestimmen wir den D^2 -Grundton; er ist in beiden Fällen 0.

Für eine Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit ist der D^2 -Grundton $\lambda^*(D^2, M)$ definiert als das Infimum der Rayleigh-Quotienten $\|D\psi\|^2 / \|\psi\|^2$, wobei sich das Infimum über alle $\psi \in W_0^{1,2}(M, \Sigma M)$, $\psi \neq 0$, erstreckt. Für $\mathbb{R}^n$ und H^n können wir auch alternativ $\lambda^*(D^2, M) = \lim_{R \rightarrow \infty} \lambda_1^D(D^2, B_R(p))$ definieren, wobei $B_R(p)$ ein geodätischer Ball in $\mathbb{R}^n$ bzw. H^n ist.

Doch beginnen wir mit der Sphäre.

Die Sphäre S^n . Für die Sphäre kennen wir den Grundton bereits; da die S^n geschlossen ist, ist der Grundton der kleinste Eigenwert des diskreten Spektrums von D^2 , d.h. $\frac{1}{4}n^2$, wenn wir die Krümmung auf 1 normieren.

SATZ 3.1. Für die geodätischen Bälle $B_{1,R}$ in der Sphäre gilt

$$(i) \quad \lambda_1^D(D^2, B_{1,R}) \geq \lambda_1^D(\Delta_0, B_{1,R}) + \frac{1}{4}n(n-1)$$

$$(ii) \quad \lambda_{jN}^D(D^2, B_{1,R}) \leq \lambda_j^D(\Delta_0, B_{1,R}) + \frac{1}{4}n^2,$$

wobei $j = 1, 2, \dots$ und $N = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Bemerkung. Die zweite Ungleichung ist für $j = 1$ asymptotisch scharf, denn für $R \rightarrow \infty$ konvergiert $\lambda_1^D(\Delta_0, B_{1,R})$ gegen 0 und $\lambda_1^D(D^2, B_{1,R})$ bis $\lambda_N^D(D^2, B_{1,R})$ gegen $\frac{1}{4}n^2$.

BEWEIS von Satz 3.1: (i) folgt aus Satz 1.13. Zu (ii) wählen wir einen

Killing-Spinor ψ zur Killing-Zahl $\frac{1}{2}$, d.h. für alle reellen Tangentialvektoren X gilt $\nabla_X^\Sigma \psi = \frac{1}{2}X \cdot \psi$. Ferner sei $f \in C_0^\infty(B_{1,R}, \mathbb{R})$ eine Eigenfunktion von Δ_0 zum Eigenwert λ .

Wir berechnen $D^2(f\psi)$ in einem Punkt $p \in B_{1,R}$ bzgl. eines um p synchronen Rahmens.

$$\begin{aligned} D^2(f\psi) &= (\nabla^\Sigma)^* \nabla^\Sigma(f\psi) + \frac{1}{4}Sf\psi = \\ &= -\sum \nabla_i^\Sigma \nabla_i^\Sigma(f\psi) + \frac{1}{4}n(n-1)f\psi = \\ &= -\sum \nabla_i^\Sigma \{ \partial_i f \cdot \psi + \frac{1}{2}fE_i \cdot \psi \} + \frac{1}{4}n(n-1)f\psi = \\ &= -\sum \{ \partial_i^2 f \psi + \partial_i f E_i \cdot \psi + \frac{1}{2}f \nabla E_i \cdot \psi + \frac{1}{2}fE_i \cdot \frac{1}{2}fE_i \cdot \psi \} + \\ &\quad + \frac{1}{4}n(n-1)f\psi = \\ &= \Delta_0 f \cdot \psi - \text{grad} f \cdot \psi - 0 + \frac{1}{4}nf\psi + \frac{1}{4}n(n-1)f\psi = \\ &= \{ \lambda + \frac{1}{4}n^2 \} f\psi - \text{grad} f \cdot \psi. \end{aligned}$$

Also gilt für das L^2 -Produkt über $B_{1,R}$:

$$(D^2(f\psi), f\psi) = \{ \lambda + \frac{1}{4}n^2 \} \|f\psi\|^2 - \int_{B_{1,R}} f \langle \text{grad} f \cdot \psi, \psi \rangle.$$

Da $\langle \text{grad} f \cdot \psi, \psi \rangle$ rein imaginär ist, der Rest aber reell ist, fällt das letzte Integral weg. Das Minimax-Prinzip liefert die Behauptung. ■

Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$. Gemäß Proposition 1.7.2 wird das Spinorbündel des $\mathbb{R}^n$ durch Killing-Spinoren zur Killing-Zahl 0, d.h. durch parallele Spinorfelder, trivialisiert. In dieser Trivialisierung ist D^2 die N -fache Summe des Laplace-Beltrami-Operators, $N = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Die D^2 -Eigenwerte auf Teilgebieten des $\mathbb{R}^n$ sind somit dieselben wie die Δ_0 -Eigenwerte, nur sind die Multiplizitäten mit N zu vervielfachen.

Insbesondere ist der D^2 -Grundton derselbe wie der Δ_0 -Grundton, also gleich 0.

Der hyperbolische Raum H^n . Sei ψ ein Killing-Spinor auf H^n mit

$|\Psi(p)| = 1$ und $\nabla_X^\Sigma \Psi = \frac{1}{2} i X \cdot \Psi$. Weiter sei c eine von p ausgehende normale Geodätische mit $\dot{c}(0) = X$.

LEMMA 3.2. Es gilt $|\Psi(c(r))|^2 = \cosh(r) + \alpha(X) \cdot \sinh(r)$, wobei $\alpha(X) = i \langle X \cdot \Psi(p), \Psi(p) \rangle$.

BEWEIS: Wir differenzieren

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} |\Psi(c(r))|^2 &= \langle \nabla_r^\Sigma \Psi, \Psi \rangle + \langle \Psi, \nabla_r^\Sigma \Psi \rangle = \\ &= \langle \frac{1}{2} i \partial_r \cdot \Psi, \Psi \rangle + \langle \Psi, \frac{1}{2} i \partial_r \cdot \Psi \rangle = \\ &= i \langle \partial_r \cdot \Psi, \Psi \rangle. \\ \frac{d^2}{dr^2} |\Psi(c(r))|^2 &= i \langle \partial_r \cdot \nabla_r^\Sigma \Psi, \Psi \rangle + i \langle \partial_r \cdot \Psi, \nabla_r^\Sigma \Psi \rangle = \\ &= i \langle \frac{1}{2} i \partial_r^2 \cdot \Psi, \Psi \rangle + i \langle \partial_r \cdot \Psi, \frac{1}{2} i \partial_r \cdot \Psi \rangle = \\ &= |\Psi|^2. \end{aligned}$$

Also gilt $|\Psi|^2 = \alpha \sinh(r) + \beta \cosh(r)$. Wegen $|\Psi(c(0))|^2 = 1$ ist $\beta = 1$. Ferner ist $\alpha = \frac{d}{dr} |\Psi(c(r))|^2 \big|_{r=0} = i \langle X \cdot \Psi, \Psi \rangle$. ■

Nun betrachten wir den modifizierten Zusammenhang $\tilde{\nabla} = \nabla^\Sigma - \frac{1}{2} i \gamma$. Dann gilt für unseren Killing-Spinor $\tilde{\nabla} \Psi = 0$.

LEMMA 3.3. Für den klassischen Dirac-Operator D gilt:

$$D^2 = \tilde{\nabla}^* \tilde{\nabla} - \frac{1}{4} n^2.$$

BEWEIS: Es ist $\tilde{\nabla}^* = (\nabla^\Sigma)^* + \frac{1}{2} i \gamma^*$ und daher

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}^* \tilde{\nabla} &= (\nabla^\Sigma)^* \nabla^\Sigma - \frac{1}{2} i (\nabla^\Sigma)^* \gamma + \frac{1}{2} i \gamma^* \nabla^\Sigma + \frac{1}{4} \gamma^* \gamma = \\ &= D^2 - \frac{1}{4} S + \frac{1}{2} i D - \frac{1}{2} i D + \frac{1}{4} n = \\ &= D^2 + \frac{1}{4} n(n-1) + \frac{1}{4} n = \\ &= D^2 + \frac{1}{4} n^2. \blacksquare \end{aligned}$$

LEMMA 3.4. Sei $R > 0$ und $\varphi : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $\varphi(R) = 0$, φ nicht konstant 0. Dann gilt:

$$\lambda_1^D(D^2, B_{-1, R}) + \frac{1}{4} n^2 \leq \frac{\int_0^R |\varphi'(r)|^2 \cosh(r) \sinh^{n-1}(r) dr}{\int_0^R |\varphi(r)|^2 \cosh(r) \sinh^{n-1}(r) dr}.$$

BEWEIS: Wir setzen $f(x) = \varphi(r)$, $r = d(x, p)$. Dann ist $f \in W_0^{1,2}(B_{-1, R}, \mathbb{R})$, und daher können wir $f \cdot \Psi$ zur oberen Abschätzung in den Rayleigh-Quotienten für D^2 einsetzen.

$$\begin{aligned} (\lambda_1^D(D^2, B_{-1, R}) + \frac{1}{4} n^2) \|f \cdot \Psi\|^2 &\leq \|D(f \Psi)\|^2 + \frac{1}{4} n^2 \|f \Psi\|^2 = \\ &= \|\tilde{\nabla}(f \Psi)\|^2 = \\ &= \|df \otimes \Psi\|^2 = \\ &= \int_{B_{-1, R}} |df|^2 |\Psi|^2. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\lambda_1^D(D^2, B_{-1, R}) + \frac{1}{4} n^2 \leq \frac{\int_{B_{-1, R}} |df|^2 |\Psi|^2}{\int_{B_{-1, R}} |f|^2 |\Psi|^2}.$$

Für den Nenner gilt

$$\int_{B_{-1, R}} |f|^2 |\Psi|^2 = \int_0^R \int_{S^{n-1}} |\varphi(r)|^2 (\cosh(r) + \alpha(X) \sinh(r)) \sinh^{n-1}(r) dX dr.$$

Da $\alpha(X)$ linear in X ist, gilt insbesondere $\alpha(-X) = -\alpha(X)$. Daher verschwindet das Integral $\int_{S^{n-1}} \alpha(X) dX$. Also ist

$$\int_{B_{-1, R}} |f|^2 |\Psi|^2 = \text{vol}(S^{n-1}) \cdot \int_0^R |\varphi(r)|^2 \cosh(r) \sinh^{n-1}(r) dr.$$

Für den Zähler geht die Rechnung genauso. ■

SATZ 3.5. Für den Dirac-Grundton des hyperbolischen Raumes gilt

$$\lambda^*(D^2, H^n) = 0.$$

BEWEIS: Sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen in Lemma 3.4 die Funktion

$$\varphi(r) = e^{-r(n+\varepsilon)/2} - e^{-R(n+\varepsilon)/2}$$

ein. Für die Ableitung gilt

$$\varphi'(r) = -\frac{1}{2}(n+\varepsilon) e^{-r(n+\varepsilon)/2}.$$

Nach Lemma 3.4 gilt

$$\begin{aligned} & \lambda_1(D^2, B_{-1, R}) + \frac{1}{4}n^2 \leq \\ & \leq \frac{\left(\frac{n+\varepsilon}{2}\right)^2 \int_0^R e^{-r(n+\varepsilon)} \cosh(r) \sinh^{n-1}(r) dr}{\int_0^R \{ e^{-r(n+\varepsilon)} - 2e^{-(R+r)(n+\varepsilon)/2} + e^{-R(n+\varepsilon)} \} \cosh(r) \sinh^{n-1}(r) dr}. \end{aligned}$$

Uns interessiert der Grenzwert dieses Bruchs für $R \rightarrow \infty$. Dazu betrachten wir den Limes des Kehrwertes

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\int_0^R \{ e^{-r(n+\varepsilon)} - 2e^{-(R+r)(n+\varepsilon)/2} + e^{-R(n+\varepsilon)} \} \cosh(r) \sinh^{n-1}(r) dr}{\int_0^R e^{-r(n+\varepsilon)} \cosh(r) \sinh^{n-1}(r) dr} \\ & = 1 - 2 \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\int_0^R e^{-(R+r)(n+\varepsilon)/2} \cosh(r) \sinh^{n-1}(r) dr}{\int_0^R e^{-r(n+\varepsilon)} \cosh(r) \sinh^{n-1}(r) dr} + \\ & + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\int_0^R e^{-R(n+\varepsilon)} \cosh(r) \sinh^{n-1}(r) dr}{\int_0^R e^{-r(n+\varepsilon)} \cosh(r) \sinh^{n-1}(r) dr}. \end{aligned}$$

Wir zeigen, daß die beiden verbleibenden Limites 0 sind. OBdA sei ab jetzt $R \geq 1$.

$$\frac{\int_0^R e^{-R(n+\varepsilon)} \cosh(r) \sinh^{n-1}(r) dr}{\int_0^R e^{-r(n+\varepsilon)} \cosh(r) \sinh^{n-1}(r) dr} =$$

$$= \frac{2^{-n} e^{-\varepsilon R} \int_0^R (e^{-R})^n (e^r + e^{-r}) (e^r - e^{-r})^{n-1} dr}{\int_0^R e^{-r(n+\varepsilon)} \cosh(r) \sinh^{n-1}(r) dr} =$$

$$= \frac{2^{-n} e^{-\varepsilon R} \int_0^R (e^{r-R} + e^{-r-R}) (e^{r-R} - e^{-r-R})^{n-1} dr}{\int_0^R e^{-r(n+\varepsilon)} \cosh(r) \sinh^{n-1}(r) dr} \leq$$

$$\leq \frac{R \cdot e^{-\varepsilon R}}{\int_0^1 e^{-r(n+\varepsilon)} \cosh(r) \sinh^{n-1}(r) dr} \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty.$$

Den anderen Term behandeln wir genauso

$$\begin{aligned} & \frac{\int_0^R e^{-(R+r)(n+\varepsilon)/2} \cosh(r) \sinh^{n-1}(r) dr}{\int_0^R e^{-r(n+\varepsilon)} \cosh(r) \sinh^{n-1}(r) dr} = \\ & = \frac{2^{-n} e^{-\varepsilon R/2} \int_0^R e^{-\varepsilon r/2} (e^{(r-R)/2} + e^{-(3r+R)/2}) (e^{(r-R)/2} - e^{-(3r+R)/2})^{n-1} dr}{\int_0^R e^{-r(n+\varepsilon)} \cosh(r) \sinh^{n-1}(r) dr} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{R \cdot e^{-\varepsilon R/2}}{\int_0^1 e^{-r(n+\varepsilon)} \cosh(r) \sinh^{n-1}(r) dr} \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty.$$

Damit ist gezeigt, daß

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\lambda_1(D^2, B_{-1, R}) + \frac{1}{4} n^2 \right) \leq \left(\frac{n+\epsilon}{2} \right)^2$$

und daher $\lambda^*(D^2, H^n) \leq \left(\frac{n+\epsilon}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} n^2$.

Der Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ liefert die Behauptung. ■

Bemerkung. Die Grundtöne des Laplace-Beltrami-Operators auf den Räumen konstanter Krümmung widersprechen dem heuristischen Prinzip, daß die größeren Mannigfaltigkeiten die kleineren Eigenwerte haben sollten, denn $\lambda^*(\Delta_o, H^n) = \frac{1}{4} (n-1)^2$ und $\lambda^*(\Delta_o, \mathbb{R}^n) = \lambda^*(\Delta_o, S^n) = 0$, aber H^n ist der größte unter diesen Räumen.

Die Grundtöne für das Quadrat des klassischen Dirac-Operators dagegen stehen im Einklang mit diesem Prinzip, denn wie wir gesehen haben, gilt $\lambda^*(D^2, H^n) = \lambda^*(D^2, \mathbb{R}^n) = 0$ und $\lambda^*(D^2, S^n) = \frac{1}{4} n^2$.

LITERATUR

- [At1] M. F. Atiyah, *Eigenvalues of the Dirac operator*, in Arbeitstagung 1984, Springer Lecture Notes **1111** (1985), 251-260
- [Aub1] T. Aubin, *Fonction de Green et valeurs propres du Laplacien*, J. Math. pures et appl. **53** (1974), 347-371
- [Aub2] T. Aubin, *Nonlinear Analysis on Manifolds*, New York 1982
- [BaRa] A. O. Barut, R. Raczka, *Theory of group representations and applications*, Polish Scientific Publishers, Warschau 1977
- [Bau1] H. Baum, *1-forms over the moduli space of irreducible connections defined by the spectrum of Dirac operators*, Preprint 169, Humboldt-Universität, Berlin 1988
- [Bau2] H. Baum, *Variétés riemanniennes admettant des spineurs de Killing imaginaires*, C. R. Acad. Sci. Paris **309** (1989), 47-49
- [Bau3] H. Baum, *Odd-dimensional Riemannian manifolds with imaginary Killing spinors*, Ann. Glob. Anal. Geom. **7** (1989), 141-154
- [Bau4] H. Baum, *An upper bound for the first eigenvalue of the Dirac operator on compact spin manifolds*, Preprint 249, Humboldt-Universität, Berlin 1990
- [BGM] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, *Le spectre d'une variété riemannienne*, Springer Lecture Notes **194** (1971)
- [Bes1] A. L. Besse, *Géométrie riemannienne en dimension 4*, CEDIC, Paris 1981
- [Bes2] A. L. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer, Berlin 1987
- [Bour] J. P. Bourguignon, *L'opérateur de Dirac et la géométrie riemannienne*, Rend. Sem. Mat. Univers. Politechn. Torino **44** (1986), 317-359

- [Br-tD] T. Bröcker, T. tom Dieck, *Representations of compact Lie groups*, Springer, New York 1985
- [CaGu] M. Cahen, S. Gutt, *Spin Structures on Compact Simply Connected Riemannian Symmetric Spaces*, Simon Stevin **62** (1988), 209-242
- [CFG] M. Cahen, A. Franc, S. Gutt, *Spectrum of the Dirac Operator on Complex Projective Space $P_{2q-1}(\mathbb{C})$* , Letters Math. Phys. **18** (1989), 165-176
- [CGLS] M. Cahen, S. Gutt, L. Lemaire, P. Spindel, *Killing Spinors*, Bull. Soc. Math. Belg. **38** (1986), 75-102
- [Chal] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Acad. Press 1984
- [Frac] A. Franc, *Spin structures and Killing spinors on lens spaces*, J. Geom. Phys. **4** (1987), 277-287
- [Fr1] T. Friedrich, *Der erste Eigenwert des Dirac-Operators einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit nicht-negativer Krümmung*, Math. Nach. **97** (1980), 117-146
- [Fr2] T. Friedrich, *A remark on the first eigenvalue of the Dirac operator on 4-dimensional manifolds*, Math. Nach. **102** (1981), 53-56
- [Fr3] T. Friedrich, *Zur Abhängigkeit des Dirac-Operators von der Spin-Struktur*, Coll. Math. **48** (1984), 57-62
- [Fr-Gr] T. Friedrich, R. Grunewald, *On the first eigenvalue of the Dirac operator on 4-dimensional manifolds*, Ann. Global Anal. Geom. **3** (1985), 265-273
- [Gil] P. B. Gilkey, *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem*, Publish or Perish 1984
- [GoWi] C. S. Gordon, E. N. Wilson, *The spectrum of the Laplacian on Riemannian Heisenberg manifolds*, Preprint
- [Gr-La] M. Gromov, H. B. Lawson, *Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds*, Publ. Math. Inst. Hautes Et. Sci. **58** (1983), 295-408
- [Her] J. Hersch, *Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques*, C. R. Acad. Sci. Paris **270** (1970), 1645-1648
- [Hij] O. Hijazi, *A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors*, Comm. Math. Phys. **104** (1986), 151-162
- [Hit] N. Hitchin, *Harmonic spinors*, Adv. in Math. **14** (1974), 1-55
- [Hof] E. T. A. Hoffmann, *Lebensansichten des Katers Murr*, Berlin 1820
- [Ik1] A. Ikeda, *On the spectrum of a Riemannian manifold of positive constant curvature*, Osaka J. Math. **17** (1980), 75-93
- [Ik2] A. Ikeda, *On the spectrum of a Riemannian manifold of positive constant curvature II*, Osaka J. Math. **17** (1980), 691-762
- [Ik3] A. Ikeda, *On lens spaces which are isospectral but not isometric*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. **13** (1980), 303-315
- [Ik4] A. Ikeda, *On spherical space forms which are isospectral but not isometric*, J. Math. Soc. Japan **35** (1983), 437-444
- [Ik5] A. Ikeda, *Riemannian manifolds p -isospectral but not $(p+1)$ -isospectral*, in *Geometry of manifolds*, Acad. Press 1989, 383-417
- [JP] Jean Paul, *Leben Fibels*, Nürnberg 1812
- [Kir1] K.-D. Kirchberg, *An estimation for the first eigenvalue of the Dirac operator on closed Kähler manifolds of positive scalar curvature*, Ann. Glob. Anal. Geom. **4** (1986), 291-325
- [Kir2] K.-D. Kirchberg, *Compact six-dimensional Kähler spin manifolds of positive scalar curvature with the smallest possible first eigenvalue of the Dirac operator*, Math. Ann. **282** (1988), 157-176

- [Kir3] K.-D. Kirchberg, *Twistor-spinors on Kähler manifolds and the first eigenvalue of the Dirac operator*, Preprint 213, Humboldt-Universität, Berlin 1989
- [Lau] Comte de Lautréament, *Les Chants de Maldoror*, Albert Lacroix, Paris 1869
- [La-Mi] H. B. Lawson, M. L. Michelson, *Spin Geometry*, Princeton Math. Series 38, Princeton 1989
- [Lic1] A. Lichnerowicz, *Spin manifolds, Killing spinors and universality of the Hijazi inequality*, Letters Math. Phys. **13** (1987), 331-344
- [Lic2] A. Lichnerowicz, *Killing spinors, twistor-spinors and Hijazi inequality*, JPG **5** (1988), 1-18
- [Lic3] A. Lichnerowicz, *Sur les résultats de H. Baum et Th. Friedrich concernant les spineurs de Killing a valeur propre imaginaire*, C. R. Acad. Sci. Paris **309** (1989), 41-45
- [Lbg] Lichtenberg, *Aphorismen*, Hrsg A. Leitzmann, 1902-1908
- [Mu] R. Musil, *Der Mann ohne Eigenschaften*, Hrsg A. Frisé, Hamburg 1978
- [Par] R. Parthasarathy, *Dirac operator and the discrete series*, Ann. Math. **96** (1972), 1-30
- [Rad] H.-B. Rademacher, *Generalized Killing spinors with imaginary Killing function and conformal Killing fields*, Preprint, Bonn 1990
- [Roe] J. Roe, *Elliptic operators, topology and asymptotic methods*, Longman Scientific & Technical, London 1988
- [Sle1] S. Slebarski, *The Dirac operator on homogeneous spaces and representations of reductive Lie groups I*, Am. J. Math. **109** (1987), 283-302
- [Sle2] S. Slebarski, *The Dirac operator on homogeneous spaces and*

representations of reductive Lie groups II, Am. J. Math. **109** (1987), 499-520

- [Str1] H. Strese, *Über den Dirac-Operator auf Graßmann-Mannigfaltigkeiten*, Math. Nach. **98** (1980), 53-59
- [Str2] H. Strese, *Zur harmonischen Analyse der Paare $(SO(n), SO(k)) \times SO(n-k)$ und $(SP(n), SP(k)) \times SP(n-k)$* , Math. Nach. **98** (1980), 61-73
- [Str3] H. Strese, *Spektren symmetrischer Räume*, Math. Nach. **98** (1980), 75-82
- [Str4] H. Strese, *Zum Spektrum des Laplace-Operators auf p-Formen*, Math. Nach. **106** (1982), 35-40
- [Sul1] S. Sulanke, *Berechnung des Spektrums des Quadrates des Dirac-operators auf der Sphäre*, Doktorarbeit, Humboldt-Universität, Berlin
- [Sul2] S. Sulanke, *Der erste Eigenwert des Dirac-Operators auf S^5/Γ* , Math. Nach. **99** (1980), 259-271
- [Tay] M. E. Taylor, *Pseudodifferential operators*, Princeton 1981
- [Va-Wi] C. Vafa, E. Witten, *Eigenvalue inequalities for fermions in gauge theories*, Comm. Math. Phys. **95** (1984), 257-276
- [Wal1] N. R. Wallach, *Harmonic analysis on homogeneous spaces*, Marcel Dekker, New York 1973
- [Wal2] N. R. Wallach, *Symplectic geometry and Fourier analysis*, Math Sci Press, Brookline 1977