Seminar Geometrie 2011WS

2011-10-27
Peter Grabs, petergrabs@yahoo.com
Filtrierte Algebren und Getzler-Symbole

Die Nummerierung ist direkt aus Roe J.: Elliptic Operators, topology and asymptotic methods, 2ed, Seiten 151-157, übernommen.

0.1 Filtrierte Algebren

Def: Eine Algebra ist ein ($\mathbb{C}$-)Vektorraum mit einer assoziativen Multiplikation.

Def: Sei A eine Algebra und $\mathcal{G} := (A^j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Zerlegung von A in Unterräume, d.h. $A = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} A^j$. Dann heißt $\mathcal{G}$ *($\mathbb{N}$-)Graduierung* von A, falls es mit der Multiplikation verträglich ist, d.h. $A_m \cdot A_n \subset A_{m+n}$. In diesem Falle heißt $(A, \mathcal{G})$ *($\mathbb{N}$-)graduierte Algebra*, für die wir je nach Kontext auch einfach A schreiben.

Def 12.1: Sei A eine Algebra und $\mathcal{F} := (A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Ausschöpfung von A mit Unterräumen, d.h. $\{0\} \subset A_0 \subset A_1 \subset ... \subset A$ und $A = \bigcup \mathcal{F}$. Dann heißt $\mathcal{F}$ *Filtrierung* von A, falls es mit der Multiplikation verträglich ist. In diesem Falle heißt $(A, \mathcal{F})$ *filtrierte Algebra*, für die wir je nach Kontext auch einfach A schreiben.

Bsp: Der Polynomring $\mathbb{C}[x]$ über $\mathbb{C}$ ist mit $\mathcal{G} := (A^j := \{\alpha x^j \mid \alpha \in \mathbb{C}\})_{j\in\mathbb{N}}$ eine graduierte Algebra und mit $\mathcal{F} := (A_j := \{\sum_{k=0}^{j} \alpha_k x^k \mid \alpha_k \in \mathbb{C}\})_{j\in\mathbb{N}}$ eine filtrierte Algebra. An diesem Beispiel drängt sich ein Zusammenhang auf, der allgemein gilt:

Bem 12.4: Ist $(A, (A^j)_{j\in\mathbb{N}})$ eine graduierte Algebra, so ist $(A, (A_j)_{j\in\mathbb{N}})$ mit $A_j := \bigoplus_{k=0}^{j} A^k$ eine filtrierte Algebra.
Das homomorpe Bild einer Filtrierung ist wieder eine, für Graduierungen gilt das nicht.
Man kann eine Filtrierung konstruieren, indem man gewissen erzeugenden Elementen Grade zuweist. Ist z.B. $B \subset A$ eine Unteralgebra und $V \subset A$ ein Untervektorraum und A erzeugt von $B \cup V$, und weist man B den Grad 0 und V den Grad 1 zu, so überträgt die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts die aus seiner Graduierung resultierende Filtrierung auf A:

$$\bigotimes\nolimits_B^* V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigotimes\nolimits_B^n V = B \oplus (B \otimes V \otimes B) \oplus (B \otimes V \otimes B \otimes V \otimes B) \oplus ... \to A,$$

wobei im kommutativen Fall nur ein B pro Summand übrig bleibt.

Bsp: Die obige Filtrierung auf $A := \mathbb{C}[x]$ entsteht auf diese Weise mit $B := \mathbb{C}$ und $V := \mathbb{C}x$.

Def 12.6: Ist $(A, (A_j)_{j\in\mathbb{N}})$ eine filtrierte Algebra, so ist $G(A) := \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} A^j$ mit $A^0 := A_0$ und $A^{j+1} := A_{j+1}/A_j$ eine graduierte Algebra, die sogenannte *assoziierte graduierte Algebra*.
Die Multiplikation ist dabei die von A auf $G(A)$ per $A^j \times A^{j'} \to A^{j+j'}, (a_j + A_{j-1}, a_{j'} + A_{j'-1}) \mapsto a_j a_{j'} + A_{j+j'-1}$ induzierte.
Als Vektorräume sind A und $G(A)$ isomorph, also Algebren jedoch i.A. nur, falls die Filtrierung von A nach Bem 12.4 aus einer Graduierung hervorgeht.

Def 12.5: Sei A eine filtrierte und G eine graduierte Algebra. Eine *Symbolabbildung* $\sigma : A \to G$ (oder auch ein *Symbol*) ist gegeben durch eine Familie $(\sigma_j : A_j \to G^j)_{j\in\mathbb{N}}$ von linearen Abbildungen mit
i) $\sigma_j(A_{j-1}) = \{0\}$ und
ii) $\forall a \in A_j, a' \in A_{j'} : \sigma_j(a)\sigma_{j'}(a') = \sigma_{j+j'}(aa')$,
wobei wir Eigenschaft ii) des Symbols als *homomorphismusartig* bezeichnen wollen.

Bem: Die Quotientenabbildungen $\sigma_j : A_j \to A_j/A_{j-1}$ definieren eine Symbolabbildung $\sigma : A \to G(A)$. Diese ist die "universelle" Symbolabbildung von A in dem Sinne, dass sich jede Symbolabbildung $\sigma' : A \to B$ in eindeutiger Weise schreiben läßt als $\sigma' = f \circ \sigma$ mit einem graduierten Algebrahomomorphismus $f : G(A) \to B$.

Bsp: Auf $A := G := \mathbb{C}[x]$ mit obiger Filtrierung und Graduierung ist durch $\sigma_k := \frac{x^k}{k!}\frac{d^k}{dx^k}$ eine Symbolabbildung gegeben, sie bildet jedes Polynom gerade auf sein Leitmonom ab. Da A und $G(A)$ isomorphe Algebren sind, ist σ die universelle Symbolabbildung.

0.2 Mehr Beispiele

Bsp 12.3 & 12.7: Die Clifford-Algebra $\mathrm{Cl}(V, q)$.
Auf $A := \mathrm{Cl}(V)$ ist eine Filtrierung gegeben durch $A_j := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\prod_{k=1}^{\ell} x_k \mid x_k \in V, \ell \le j\}$, d.h. A_j ist die lineare Hülle aller Produkte der Länge $\le j$ von Elementen von V.
Entsprechend Bem 12.4 erhält A seine Filtrierung durch die Erzeuger $B := \mathbb{C}$ (Grad 0) und V (Grad 1).
Die assoziierte graduierte Algebra ist die äußere Algebra $G(A) = \Lambda^*V = \mathrm{Cl}(V, 0)$, und die entsprechende Symbolabbildung $\sigma : \mathrm{Cl}(V) \to \Lambda^*V$ ist gegeben durch $\sigma_\ell : \mathrm{Cl}_\ell(V) \to \Lambda^\ell V, \sum_{\beta\in\{0,1\}^n, |\beta|\le\ell} \alpha_\beta \prod_{k=1}^{\ell} e_k^{\beta_k} \mapsto \sum_{|\beta|=\ell} \alpha_\beta \bigwedge_{k=1}^{\ell} e_k^{\beta_k}$ mit $e_k^0 := 1$ und $e_k^1 := e_k$, d.h. $\sigma(w)$ ist der höchstgradige Anteil des Bildes $\varphi(w)$ des kanonischen Vektorraumisomorphismusses $\varphi : \mathrm{Cl}(V) \to \Lambda^*V$ (dieser macht einfach in den Basen aus der Cliffordmultiplikation das Wedgeprodukt).

Bsp 12.2 & 12.8: Die Differentialoperatoren $\mathfrak{D}(M)$ einer Mannigfaltigkeit M.
Für $A := \mathfrak{D}(M) := \mathrm{Diff}(M \times \mathbb{C}, M \times \mathbb{C})$ ist durch $A_j = \mathfrak{D}_j(M) := \mathrm{Diff}_j(M \times \mathbb{C}, M \times \mathbb{C})$ (die Diffops der Ordnung $\le j$) eine Filtrierung gegeben.
Um Symbolabbildungen auf A zu untersuchen, wollen wir erstmal Ausdrücke wie A_j/A_{j-1} für Diffops verstehen.

Für einen endlichdimensionalen Vektorraum V sei $\mathfrak{C}(V)$ die graduierte Algebra der Diffops mit konstanten Koeffizienten auf $\mathcal{C}^\infty(V)$, ihre Graduierung ist gegeben durch $\mathfrak{C}^j(V) := \mathfrak{C}_j(V) \ominus \mathfrak{C}_{j-1}(V)$ (wobei $X \ominus Y := X\backslash Y \cup \{0\}$ und $\mathfrak{C}_j$ Diffops der Ordnung j). Wir betrachten nun das Bündel $\mathfrak{C}(TM) \to M$ (mit $\mathfrak{C}(TM)_p = \mathfrak{C}(T_pM)$) und die (durch $m \mapsto \Gamma(\mathfrak{C}^m(TM))$) graduierte Algebra der glatten Schnitte $\Gamma(\mathfrak{C}(TM))$. Wir wollen eine Symbolabbildung

$$\sigma : \mathfrak{D}(M) \to \Gamma(\mathfrak{C}(TM))$$

konstruieren. Wähle $p \in M$, Koordinaten (x^i) um p und schreibe $T \in \mathfrak{D}_m(M)$ um p als

$$T = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(x)\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}.$$

Sei $\sigma_{m,p}(T) \in \mathfrak{C}^m(T_pM)$ der durch "Einfrieren" der Koeffizienten erhaltene Diffop

$$\sigma_{m,p}(T) := \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(0) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}.$$

der Ordnung m auf $\mathcal{C}^\infty(T_pM)$. Diese Definition von $\sigma_{m,p}$ hängt nicht von der Wahl der Koordinaten ab, verschwindet für Operatoren mit Ordnung $< m$ und erfüllt für $T \in A_m, T' \in A_{m'}$, dass $\sigma_m(T)\sigma_{m'}(T') = \sigma_{m+m'}(TT')$, denn die restlichen Leibnizregel-Terme in TT' haben Ordnung $< m$. Nun ist $\sigma_{m,p}(T)$ glatt in p, das liefert eine Familie von linearen Abbildungen

$$\sigma_m : \mathfrak{D}_m(M) \to \Gamma(\mathfrak{C}^m(TM)),$$

welche unser gesuchtes Symbol $\sigma : \mathfrak{D}(M) \to \Gamma(\mathfrak{C}(TM))$ definiert.

Bem 12.9: Entsprechend Bem 12.4 wird die Algebra $A := \mathfrak{D}(M)$ (und ihre Filtrierung) erzeugt von $B := \mathcal{C}^\infty(M)$ (mit Grad 0) und $V := \mathfrak{X}(M)$ (mit Grad 1; Vektorfelder interpretiert als Lie-Ableitung).
Unsere Symbolabbildung ist also bereits festgelegt durch ihre Werte auf diesen Erzeugern.
Für $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ist $\sigma_0(f) = f \in \Gamma(\mathfrak{C}^0(TM))$ (Multiplikation mit f) und für $X \in \mathfrak{X}(M)$ ist $\sigma_1(X) = X = \partial_X \in \Gamma(\mathfrak{C}^1(TM))$.

0.3 Getzler Symbole

Sei M eine graddimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit und $S \to M$ ein Cliffordbündel.
Es gibt einen Isomorphismus (4.12)

$$\mathrm{End}(S) = \mathrm{Cl}(TM) \otimes \mathrm{End}_{\mathrm{Cl}(TM)}(S).$$

Diesen verwenden wir, um aus $\mathrm{End}(S)$ mittels $m \mapsto \mathrm{Cl}(TM)_m \otimes \mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S)$ (vgl. Bsp 12.3) ein Bündel filtrierter Algebren zu machen. Diese Filtrierung heiße *Cliffordfiltrierung* von $\mathrm{End}(S)$.
Wir wollen uns die Algebra $\mathfrak{D}(S) := \mathrm{Diff}(S, S)$ von Diffops auf $\Gamma(S)$ ansehen. Diese Algebra ist erzeugt von Cliffordmultiplikationen, Schnitten des Bündels $\mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S)$, sowie kovarianten Ableitungen.

Def 12.10: Die *Getzlerfiltrierung* von $\mathfrak{D}(S)$ is diejenige, die analog Bem 12.4 für die Erzeuger $B := \mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S)$ und $V := \mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{X}(M)$ (aufgefasst als Cliffordmultiplikationen und kovariante Ableitungen) aus folgenden Daten hervorgeht, d.h.
i) Die Elemente von $\mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S)$ haben Grad 0.
ii) Die Cliffordmultiplikationen $X\cdot$ für $X \in \mathfrak{X}(M)$ haben Grad 1.
iii) Kovariante Ableitungen ∇_X für $X \in \mathfrak{X}(M)$ haben Grad 1.
Wir versehen jetzt $\mathfrak{D}(S)$ immer mit dieser Filtrierung.

Nun wollen wir eine Symbolabbildung auf $\mathfrak{D}(S)$ definieren, wie die auf $\mathfrak{D}(M)$ wird sie in die Schnitte eines Büdels von Diffops auf $\mathcal{C}^\infty(TM)$ abbilden, diesmal aber nicht mit konstanten Koeffizienten.

Def 12.11: Sei V ein Vektorraum und $\mathfrak{P}(V)$ die Algebra der Diffops mit polynomiellen Koeffizienten auf $\mathcal{C}^\infty(V)$. Diese Algebra ist graduiert durch $x^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \mapsto |\beta| - |\alpha|$ (hier handelt es sich um einge $\mathbb{Z}$-Graduierung, aber es funktioniert alles Relevante analog).

Def 12.12: Betrachte den riemannschen Krümmungstensor $R : \Omega^2(M) \to \mathrm{End}(TM)$. Für $X \in \mathfrak{X}(M)$ betrachte die lineare Abbildung $v \mapsto (R_p X_p, v) : T_pM \to \Lambda^2 T_p^*M$, die Metrik liefert einen Isomorphismus $\Lambda^2 T_p^*M = \Lambda^2 T_pM$, wir können sie also als polynomielle Funktion auf T_pM mit Werten in $\Lambda^2 T_pM$ betrachten, also als Element von $\mathfrak{P}(TM) \otimes \Lambda^* TM$, dieses wollen wir $(RX, \cdot)$ nennen.

Prop 12.13: Es gibt eine eindeutige Symbolabbildung (die *Getzlersymbolabbildung*)

$$\sigma : \mathfrak{D}(S) \to \Gamma(\mathfrak{P}(TM) \otimes \Lambda^* TM \otimes \mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S)),$$

welche sich wie folgt auf die Erzeuger auswirkt:
i) $\sigma_0(F) = F$ für alle Cliffordmodulendomorphismen $F \in \mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S)$.
ii) $\sigma_1(X\cdot) = X\wedge$ für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ (d.h. aus Cliffordlinksmultiplikation wird äußere).
iii) $\sigma_1(\nabla_X) = \partial_X + \frac{1}{4}(RX, \cdot)$ für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Es ist klar, dass die Wirkung auf die Erzeuger die Abbildung festlegt. In Wirklichkeit wird jedoch durch diese Wirkung eine Abbildung auf $\bigotimes_B^* V$ mit $B := \mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S)$ und $V := \mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{X}(M)$ festgelegt, und es ist fraglich ob diese auch auf $\mathfrak{D}(M)$ wohldefiniert ist, also ob sie sich mit dem Quotientenübergang $\bigotimes_B^* V \to \mathfrak{D}(S)$ verträgt, d.h. die Relationen zwischen den Generatoren von $\mathfrak{D}(S)$ respektiert.
Der Beweis der Wohldefiniertheit wird im nächsten Abschnitt (d.h. im nächsten Vortrag) abgeschlossen. Hier wird schonmal exemplarisch nachgerechnet, dass σ eine entscheidende Relation respektiert:

Bsp 12.14: In $\mathfrak{D}(S)$ gilt

$$\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} = K(X,Y) = R^S(X,Y) + F^S(X,Y). \tag{12.15}$$

Die zweite Gleichheit sei bekannt, hier wird die Krümmung K zerlegt in den Riemannendomorphismus $R^S : \Omega^2(M) \to \mathrm{End}(S), (X,Y) \mapsto \frac{1}{4}\sum_{k,\ell} e_k \cdot e_\ell \cdot (R(X,Y)e_k, e_\ell)$ und die Twistingkrümmung F^S des Cliffordbündels (eine $\mathrm{End}_{\mathrm{Cl}}(S)$-wertige 2-Form).
Wir berechnen die Getzlersymbole zweiter Ordnung σ_2 beider Seiten und verifizieren, dass sie übereinstimmen. $\nabla_{[X,Y]}$ können wir wegen Ordnung 1 ignorieren, ebenso $F^S(X,Y)$ wegen Ordnung 0. Fixiere $p \in M$ und wähle eine ONB (e_i) von T_pM mit zugehörigen Koordinatenfunktionen (x^i). Dann gilt

$$\begin{aligned}\sigma_1(\nabla_i) = \partial_i + \frac{1}{4}(Re_i, \cdot) &= \partial_i + \frac{1}{4}\sum_{j,k,\ell} (R(e_k, e_\ell)\, e_i, e_j) x^j \frac{e_k \wedge e_\ell}{-2} \\ &= \partial_i - \frac{1}{8}\sum_{j,k,\ell} (R(e_i, e_j)\, e_k, e_\ell) x^j e_k \wedge e_\ell.\end{aligned}$$

Das gilt es nun in $\sigma_2(\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i) = \sigma_1(\nabla_i)\sigma_1(\nabla_j) - \sigma_1(\nabla_j)\sigma_1(\nabla_i)$ einzusetzen, dabei verschwinden die zweiten Ableitungen, die 4-Formen heben sich weg und übrig bleibt zweimal derselbe Mischterm, $= [\sigma_1(\nabla_i), \sigma_1(\nabla_j)] = \frac{1}{4}\sum_{k,\ell} (R(e_i, e_j)e_k, e_\ell)\, e_k \wedge e_\ell = \sigma_2(R^S(e_i, e_j))$.

Wir glauben jetzt erstmal an die Existenz der Getzlersymbolabbildung und berechnen die Symbole einiger wichtiger Diffops.

Bsp 12.16: Zeige: Der Diracoperator D hat Geztlerordnung 2, und sein symbol ist die äußere Ableitung d_{TM}.

Dazu wählen wir eine lokale ONB (e_i) und schreiben $D = \sum_i e_i \cdot \nabla_i$, was $\sigma_2(D) = \sum \sigma_1(e_i\cdot)\sigma_1(\nabla_i)$ gibt. Dabei ist $\sigma_1(e_i\cdot) = e_i\wedge$ per Konstruktion und $\sigma_1(\nabla_i)$ haben wir gerade schon berechnet, wir erhalten somit

$$\sigma_2(D) = \sum_i e_i \partial_i - \frac{1}{8} \sum_{i,j,k,\ell} \left(R(e_i, e_j)e_k, e_\ell \right) \left(e_i \wedge e_k \wedge e_\ell \right) x^j,$$

wobei der Krümmungsterm wegen der Bianchiidentität verschwindet.
Wegen $d^2 = 0$ verschwindet $\sigma_4(D^2)$, es stellt sich (nicht offensichtlich) heraus, dass D^2 ebenfalls Getzlerordnung 2 hat. Später wird $\sigma_2(D^2)$ wichtig sein, also berechnen wir das noch.

Prop 12.17: Der operator D^2 hat Getzlerordung 2. Sein Getzlersymbol bzgl einer ONB von T_pM ist

$$-\sum_i \left(\partial_i + \frac{1}{4} \sum_j R_{ij} x^j \right)^2 + F^S,$$

wobei $R_{ij} = \sum_{\ell<k} R_{ij\ell k} x^\ell \wedge x^k = \sum_{\ell<k} \left(R(e_\ell, e_k)e_j, e_i \right) x^\ell \wedge x^k$ die Riemannkrümmung bei p als Matrix mit Einträgen in den 2-Formen ist und F^S wieder die Twistingkrümmungs-2-form des Cliffordbüdels bei p.

Beweis: Das folgt aus der Weizenböckformel (3.18)

$$D^2 = \nabla^* \nabla + \frac{1}{4} \kappa + \mathrm{F}^S,$$

wobei $\mathrm{F}^S = \sum_{i<j} e_i \cdot e_j \cdot F^S(e_i, e_j)$ die Cliffordkontraktion der Twistingkrümmung und $\kappa = \sum_{i,j} R_{ijij}$ die Skalarkrümmung ist. Und aus Lemma 3.9: In lokalen Koordinaten ist $\nabla^* : \Gamma(T^*M \otimes S) \to \Gamma(S)$ gegeben durch

$$\nabla^* \left(x^j \otimes s_j \right) = -\sum_k g_{ik} \left(\nabla_j s_k - \Gamma^i_{jk} s_i \right).$$

Nach dieser Formel ist

$$\nabla^* \nabla = \sum_{i,j,k} -g^{jk} \left(\nabla_j \nabla_k - \Gamma^i_{jk} \nabla_i \right),$$

in p gilt dabei $g^{jk} = \delta^{jk}$ und $\Gamma^i_{jk} = 0$, es bleibt also nur

$$\sigma_2(\nabla^* \nabla) = \sigma_2(-\sum_i \nabla_i \nabla_i) = -\sum_i \left(\partial_i + \frac{1}{4} \sum_j R_{ij} x^j \right)^2.$$

Schliesslich ist offensichtlich $\sigma_2(\mathrm{F}^S) = F^S$ und $\sigma_2(\kappa) = 0$. *q.e.d.*