

Cauchy-Kowalevskaja-Theorem

Christoph Stephan, 10. Februar 2010

Erinnerung

Im Vortrag vom 3. 2. 2010 wurde gezeigt, dass für Lösungen der in Definition 4 gegebenen quasilineare PDE (unter Annahme der Cauchy-Bedingungen), alle partiellen Ableitungen auf der nicht-charakteristischen Hyperfläche Γ (in einer Umgebung um einen Punkt $x_0 \in \Gamma$) berechnet werden können. Formal lässt sich also in einer Umgebung um einen Punkt $x_0 \in \Gamma$ eine Lösung $u(x)$ der PDE als Potenzreihe schreiben:

$$u(x) = \sum_{\alpha} u_{\alpha} (x - x_0)^{\alpha} \quad (1)$$

Es soll im Folgenden gezeigt werden, dass $u(x)$ wirklich eine Lösung ist. D.h. es existiert ein $r > 0$, so dass $u(x)$ für alle x mit $|x - x_0| < r$ konvergiert.

Satz 1. *Sei $\Gamma \subset U$ eine nicht-charakteristische, analytische Hyperfläche für die quasilineare PDE (Def. 4, Vortrag 3.2.2010). Seien alle Koeffizienten a_{α} , a_0 der PDE und alle Cauchy-Daten g_i ($i = 1, \dots, k-1$) analytisch in einer Umgebung von $x_0 \in \Gamma$.*

Dann existieren ein $r > 0$ und eine Lösung $u(x)$ der PDE, die den Cauchy-Bedingungen genügt, so dass die Potenzreihe (1) für alle x mit $|x - x_0| < r$ konvergiert. Die Lösung $u(x)$ ist somit analytisch auf dem offenen Ball $B(x_0, r)$.

Beweisskizze: Der Beweis lässt sich in drei Schritte unterteilen.

1. „Begradigen“ der Hyperfläche Γ in der Umgebung von x_0 . Außerdem Subtraktion einer geeigneten analytischen Funktion $g(x)$ von $u(x)$, so dass alle Cauchy-Daten identisch Null sind (in der Umgebung von x_0).
2. Transformation der quasilinearen PDE in ein System von PDEs erster Ordnung.
3. Abschätzen des PDE-Systems und der Lösung mit einer explizit gegebenen konvergenten Majorante.

Zu Punkt 1: Da Γ in einer Umgebung $U \in \mathbb{R}^n$ von x_0 analytisch ist, existiert eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass $\Phi(\Gamma) \subset \{y_n = 0\}$. Mit einer passenden Koordinatentransformation gilt $\Phi(x_0) = y_0 = 0 \in \{y_n = 0\}$

Wir wählen außerdem eine geeignete analytische Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und ersetzen u durch $\tilde{u} := u - g$, um die Cauchy-Bedingungen auf $\{y_n = 0\}$ identisch Null zu setzen.

Wir erhalten eine neue quasilineare PDE

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha (D^{k-1} \tilde{u}, \dots, \tilde{u}, y) D^\alpha \tilde{u} + a_0 (D^{k-1} \tilde{u}, \dots, \tilde{u}, y) = 0 \quad \text{in } \{y_n = 0\} \quad (2)$$

und die neuen Cauchy-Bedingungen:

$$\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_n} = \dots = \frac{\partial^{k-1} \tilde{u}}{\partial y_n^{k-1}} = 0 \quad (3)$$

auf $\{y_n = 0\}$. Um die Notation zu vereinfachen bezeichnen wir die transformierten Koordinaten weiterhin mit x und die Koeffizienten der PDE mit a_α bzw. a_0 . Man sieht sofort, dass die $k-1$ -ten partiellen Ableitungen von $\tilde{u}(0)$ identisch Null sind.

Zu Punkt 2: Wir führen als neue Variable den Vektor $\mathbf{u} := (\tilde{u}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_n}, \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1^2}, \dots, \frac{\partial^{k-1} \tilde{u}}{\partial y_1^{k-1}})$, $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, ein und lösen die PDE nach den partiellen Ableitung nach y_n auf. Dann können wir die quasilineare PDE als PDE-System erster Ordnung für $\mathbf{u}$ umschreiben:

$$\mathbf{u}_{y_n} = \sum_{j=1}^{n-1} B_j(\mathbf{u}, y') \mathbf{u}_{y_j} + c(\mathbf{u}, y') \quad (4)$$

mit $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$ und $|y'| < r$. Die neuen Koeffizienten $B_j : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \text{Mat}(m \times m, \mathbb{R})$ und $c : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ sind analytisch. Sollten B_j bzw. c von y_n abhängen, so führt man einen Koeffizienten $u^{m+1} = y_n$ in $\mathbf{u}$ ein. Die Cauchy-Bedingungen sind jetzt einfach $\mathbf{u}(y) = 0$ für $|y'| < r$ und $y_n = 0$.

Zu Punkt 3: Es werden nun Majoranten B_j^* und c^* für B_j und c gewählt und eine entsprechende Lösung $\mathbf{u}^*$ des PDE-Systems

$$\mathbf{u}_{y_n}^* = \sum_{j=1}^{n-1} B_j(\mathbf{u}^*, y') \mathbf{u}_{y_j}^* + c(\mathbf{u}^*, y') \quad (5)$$

unter Annahme der Cauchy-Bedingungen $\mathbf{u}^*(y) = 0$ für $|y'| < r$ und $y_n = 0$ explizit berechnet. Die Lösung $\mathbf{u}^*$ konvergiert für geeignetes $r > 0$ und ist eine Majorante der Lösung $\mathbf{u}$ des ursprünglichen Systems, die somit ebenfalls konvergiert. Aus der Konvergenz von $\mathbf{u}$ lässt sich sukzessive durch Rücktransformation auf die Konvergenz der Lösungen $\tilde{u}$ und schließlich u des ursprünglichen Cauchy-Problems im Cauchy-Kowalevskaja-Theorem schließen.

Literatur

[1] L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, AMS 1998