Seminar Geometrie, Wintersemester 2009/10
bei Prof. Dr. C. Bär
Institut für Mathematik der Universität Potsdam

Analytische Funktionen

Christoph Stephan, 3. Februar 2010

Reelle analytische Funktionen

Definition 1. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt (reell) analytisch in einer Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}^n$, falls ein $r > 0$ existiert, so dass $f(x) = \sum_\alpha f_\alpha (x - x_0)^\alpha$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x - x_0| < r$ gilt.

Bemerkungen:

i) Multiindexschreibweise: $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ für $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

ii) f ist analytisch in einer Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f$ ist C^∞ in einer Umgebung von x_0.

iii) Die Konstanten f_α sind gegeben durch $f_\alpha = \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}$, mit $\alpha! := \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!$.

$$\Rightarrow f(x) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x - x_0)(x - x_0)^\alpha \tag{1}$$

für $|x - x_0| < r$ (Taylorreihe).

Definition 2. [1, S. 227] Seien $f(x) = \sum_\alpha f_\alpha x^\alpha$ und $g(x) = \sum_\alpha g_\alpha x^\alpha$ zwei Potenzreihen ($g, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). Dann heißt g Majorante von f (Notation: $g \gg f$), falls $g_\alpha \geq |f_\alpha|$ für alle Mulitindizes α.

Lemma 3. *[1, S. 227] Seien g, f Potenzreihen (wie in Def. 3) und $r > 0$.*

i) Falls $g \gg f$ und g konvergiert für $|x| < r$, so konvergiert auch f für $|x| < r$.

ii) Falls $f(x) = \sum_\alpha f_\alpha x^\alpha$ für $|x| < r$ konvergiert und $0 < s\sqrt{n} < r$, dann besitzt f eine Majorante für $|x| < s\sqrt{n}$.

Lösungen quasi-linearer PDEs

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet und $\Gamma \subset U$ eine $(n-1)$-dimensionale Hyperfläche. Ein Einheitsnormalenvektor am Punkt $x_0 \in \Gamma$ wird mit $\nu(x_0) = (\nu_1, ..., \nu_n)$ bezeichnet. Wir nehmen im Folgenden an, dass alle Koeffizienten und Funktionen analytisch (oder zumindestens glatt) sind.

Notation: Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\nu = \nu(x_0)$ Normalenvektor an $x_0 \in \Gamma$. Dann ist

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} := \sum_{|\alpha|=j} D^\alpha u \nu^\alpha = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=j} \frac{\partial^j u}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \nu_1^{\alpha_1} \cdots \nu_n^{\alpha_n} \tag{2}$$

die j-te Ableitung in Normalenrichtung von u bei $x_0 \in \Gamma$.

Definition 4. [1, S. 221-222] Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet und $\Gamma \subset U$ eine $(n-1)$-dimensionale Hyperfläche und ν ein Normalenvektorfeld auf Γ.

Wir betrachten die quasilineare PDE

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, ..., u, x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, ..., u, x) = 0 \quad \text{in } U \tag{3}$$

und geben auf Γ für u die folgenden Cauchy-Bedingingungen vor:

$$u = g_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_1, \ldots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = g_{k-1} \tag{4}$$

Die Funktionen $g_0, ..., g_{k-1}$ heißen Cauchy-Daten auf Γ.

Wir nehmen zunächst an, dass wir bereits eine (analytische bzw. glatte) Lösung u der PDE gefunden haben, die den Cauchy-Daten auf Γ genügt.

Problemstellung: Können aus den gegebenen Daten (PDE, Cauchy-Daten) alle partiellen Ableitungen von u in Γ bestimmt werden? Diese Frage ist relevant, da im Cauchy-Kowaleskaja-Theorem die Existenz und Eindeutigkeit einer analytischen Lösung der PDE gezeigt werden soll.

Definition 5. [1, S. 224] Eine Hyperfläche $\Gamma \subset U$ heißt nicht-charakteristisch für die PDE (3), wenn $\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \nu^\alpha \neq 0$ auf Γ für alle Argumente der Koeffizienten $a_\alpha(|\alpha| = k)$ der PDE gilt.

Satz 6. *[1, S. 224] Sei $\Gamma \subset U$ eine nicht-charakteristische Hyperfläche für die PDE (3) und sei u eine (analytische bzw. glatte) Lösung von (3), die den Cauchy-Bedingungen (4) genügt.*

Dann können alle partiellen Ableitungen von u entlang Γ aus den Cauchy-Daten $g_0, ..., g_{k-1}$ und den Koeffizienten $a_\alpha(|\alpha| = k), a_0$ bestimmt werden.

Literatur

[1] L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, AMS 1998