

Die Lax-Oleinik-Formel

Christian Becker, 13.1.2010

Die Lax-Oleinik-Formel

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + F(u)_x &= 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u &= g & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} . \end{aligned} \tag{1}$$

Wir hatten bereits festgestellt, dass Integrallösungen dieses Problems i. Allg. nicht eindeutig sind, aber evtl. durch die sog. Entropie-Bedingung festgelegt werden. Wir geben nun eine Formel für Integrallösungen an und zeigen, durch welches zusätzliche Kriterium die durch diese Formel gegebenen Lösungen charakterisiert werden können.

Satz 1. *Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und gleichmäßig konvex, und sei $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Sei ferner $L := F^*$, sei $G := (F')^{-1}$, und setze $h(x) := \int_0^x g(y) dy$. Dann gilt:*

1. *Für jedes $t > 0$ gibt es für alle bis auf höchstens abzählbar viele $x \in \mathbb{R}$ ein eindeutig bestimmtes $y(x, t)$, so dass gilt:*

$$\min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + h(y) \right\} = tL\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right) + h(y(x,t)).$$

2. *Die Abbildung $x \mapsto y(x, t)$ ist monoton steigend.*

3. *Für jedes $t > 0$ gilt: für fast alle $x \in \mathbb{R}$ ist*

$$u(x, t) := \partial_x \left\{ \min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + h(y) \right\} \right\} = G\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right).$$

4. *Diese Funktion $u(x, t)$ ist Integrallösung des Anfangswertproblems (1).*

Definition 2. Die Funktion $u(x, t) := \partial_x \left\{ \min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + h(y) \right\} \right\}$ heißt die *Lax-Oleinik-Lösung* des Anfangswertproblems (1).

Eindeutigkeit, Entropiebedingung

Wir kommen nun zur Charakterisierung der Lax-Oleinik-Lösung durch eine sog. Entropie-Bedingung:

Lemma 3. *Die Lax-Oleinik-Lösung u erfüllt folgende Abschätzung: Es gibt ein $C > 0$, so dass für jedes $t > 0$ und für alle $x, z \in \mathbb{R}$, $z > 0$, gilt:*

$$u(x+z, t) - u(x, t) \leq \frac{C}{t} \cdot z. \quad (2)$$

Somit ist die Funktion $x \mapsto u(x, t) - \frac{C}{t} \cdot x$ monoton, hat also rechts- und linksseitige Grenzwerte. Damit hat auch $x \mapsto u(x, t)$ rechts- und linksseitige Grenzwerte, und für $z \geq 0$ folgt aus (2) die Rankine-Hugoniot-Bedingung $u_l(x, t) \geq u_r(x, t)$.

Definition 4. Die Ungleichung (2) heißt *Entropie-Bedingung*.

Eine Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ heißt *Entropielösung* des Anfangswertproblems (1), falls für jede Testfunktion $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty); \mathbb{R})$ gilt

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty uv_t + F(u)v_x dx dt + \int_{-\infty}^\infty gv dt \Big|_{t=0} = 0,$$

und falls es ein $C > 0$ gibt, so dass für jedes $t > 0$ und für fast alle $x, z \in \mathbb{R}$, $z > 0$, gilt:

$$u(x+z, t) - u(x, t) \leq C \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right) \cdot z.$$

Satz 5. *Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und konvex. Dann gibt es – bis auf Modifikation auf einer Nullmenge – höchstens eine Entropie-Lösung des Anfangswertproblems (1).*

Literatur

[1] L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, AMS 1998