

Das Riemannproblem

Steffen Fröhlich, 27.01.2010

In diesem Vortrag behandeln wir folgende drei Themen.

1. *Das Riemannproblem*

Wir lösen ohne Benutzung der Lax-Oleinik-Formel explizit ein spezielles Anfangswertproblem für die Erhaltungsgleichung

$$u_t + F(u)_x = 0.$$

2. *Langzeitverhalten I: Konvergenz in der L^∞ -Norm*

Unter Verwendung der Lax-Oleinik-Formel beweisen wir

$$|u(x, t)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

für Lösungen der Erhaltungsgleichung.

3. *Langzeitverhalten II: Konvergenz in der L^1 -Norm*

Wir zeigen die Konvergenz einer solchen Lösung in der L^1 -Norm gegen ein sogenanntes N-Wellenprofil.

Das Riemannproblem

Definition 1. Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + F(u)_x &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u &= g && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

mit den speziellen Anfangsdaten

$$g(x) = \begin{cases} u_\ell & \text{für } x < 0 \\ u_r & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

mit Konstanten u_ℓ und u_r heißt Riemannproblem für die skalare Erhaltungsgleichung.

Folgender Satz wird durch explizite Integration einer schwachen Lösung der Differentialgleichung gezeigt:

Satz 2. Es bezeichne u eine Entropielösung des Riemannproblems.

1. Die eindeutige Entropielösung im Fall $u_\ell > u_r$ lautet

$$u(x, t) = \begin{cases} u_\ell, & \text{falls } x < \sigma t \\ u_r, & \text{falls } x > \sigma t \end{cases}$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ mit

$$\sigma := \frac{F(u_\ell) - F(u_r)}{u_\ell - u_r}.$$

2. Die eindeutige Entropielösung im Fall $u_\ell < u_r$ lautet

$$u(x, t) := \begin{cases} u_\ell, & \text{falls } \frac{x}{t} < F'(u_\ell) \\ G(x/t), & \text{falls } F'(u_\ell) < \frac{x}{t} < F'(u_r) \\ u_r, & \text{falls } \frac{x}{t} > F'(u_r) \end{cases}$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$, wobei $G = (F')^{-1}$.

Im ersten Fall werden die beiden Zustände u_ℓ und u_r durch einen Schock getrennt, welcher sich mit der Geschwindigkeit σ bewegt. Im zweiten Fall tritt eine Verdünnungswelle statt eines Schocks auf.

Langzeitverhalten I: Asymptotik in der L^∞ -Norm

Satz 3. Sei F glatt und gleichmäßig konvex mit $F(0) = 0$. Sei ferner g beschränkt und L^1 -regulär. Dann gilt für jede Entropielösung $u(x, t)$ der Erhaltungsgleichung

$$|u(x, t)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

mit einer reellen Konstante $C > 0$.

In den Beweis geht wesentlich die gleichmäßige Konvexität von F ein. Die Konstante C enthält insbesondere die Lipschitzkonstante der Funktion G . Der Beweis wird unter Benutzung der Lax-Oleinik-Formel geführt.

Langzeitverhalten II: L^1 -Konvergenz gegen ein N-Wellenprofil

Die Lax-Oleinik-Formel ist auch wesentliches Hilfsmittel zum Beweis dieses dritten Resultats: Mit reellen Konstanten p, q, d und σ , wobei $p, q \geq 0$ und $d > 0$, definieren wir das N-Profil

$$N(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{d} \left(\frac{x}{t} - \sigma \right) & \text{für } -(pdt)^{\frac{1}{2}} < x - \sigma t < (qdt)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dabei bedeutet σ die Geschwindigkeit der N-Welle. Die Konstanten werden wie folgt spezifiziert:

$$d := F''(0) > 0$$

sowie

$$p := -2 \min_{y \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^y g \, dx, \quad q := 2 \max_{y \in \mathbb{R}} \int_y^{\infty} g \, dx.$$

Unter der Voraussetzung

g besitzt kompakten Träger

sind $p, q \geq 0$. Ausserdem gilt

$$G'(\sigma) = \frac{1}{d}.$$

Satz 4. *Seien sogar $p, q > 0$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für jede Entropielösung der Erhaltungsgleichung unter den gemachten Voraussetzungen gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t) - N(x, t)| \, dx \leq \frac{C}{\sqrt{t}}.$$