Seminar Geometrie, Wintersemester 2009/10
bei Prof. Dr. C. Bär
Institut für Mathematik der Universität Potsdam

Erhaltungsgesetze I

Immanuel Asmus, 06.01.2010

Problemstellung

In diesem und den folgenden Vorträgen wollen wir Lösungen für Anfangswertprobleme der Form

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{1}$$

finden, wobei $F, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben sind und $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gesucht.

Wie wir in den vorangegangenen Vorträgen bereits erfuhren, können wir im Allgemeinen keine globalen glatten Lösungen erwarten. Deshalb benötigen wir eine Definition, die es uns erlaubt, auch weniger reguläre Funktionen u als „Lösungen" von (1) anzusehen.

Definition 1. Eine Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ heißt *Integrallösung von (1),* falls für jede Testfunktion $v \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ gilt:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \big(uv_t + F(u)v_x\big)\, dx\, dt + \int_{-\infty}^\infty gv\, dx\big|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

Eine glatte Funktion u ist genau dann eine Integrallösung von (1), wenn sie (1) tatsächlich löst.

Eigenschaften von Integrallösungen

Notation. *Sei* $C := \{(x, t) \mid x = s(t)\}$ *der Graph einer glatten Kurve* $s : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. *Sei* $V \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$ *offen und zusammenhängend. Sei* $u\big|_V$ *auf beiden Seiten von* C *glatt. Setze dann für* $(x_0, t_0) \in C \cap V$

- $u_l(x_0, t_0) := \lim\limits_{x \nearrow x_0} u(x, t_0)$,
- $u_r(x_0, t_0) := \lim\limits_{x \searrow x_0} u(x, t_0)$,
- $[[u]] := u_l - u_r$ *(die* Sprunghöhe *von* u *über* C*),*
- $[[F(u)]] := F(u_l) - F(u_r)$ *(die Sprunghöhe von* $F(u)$*),*
- $\sigma := \dot{s}$ *(die* Geschwindigkeit *von* C*).*

Satz 2. *Für jede Integrallösung u von (1), die auf beiden Seiten der Kurve C glatt ist, gilt die* Rankine-Huginot-Bedingung

$$[[F(u)]] = \sigma \cdot [[u]] \tag{3}$$

entlang C.

Im Allgemeinen besitzt ein Anfangswertproblem mehrere Integrallösungen. Deshalb können wir noch weitere Bedingungen an die Lösungen stellen. Verlangen wir z.B., dass die projizierte Charakteristik durch einen Wert $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ bei $t < t_0$ keine andere Charakteristik kreuzt, so erhalten wir die *Entropiebedingung*

$$F'(u_l) > \sigma > F'(u_r) \tag{4}$$

entlang der Unstetigkeitskurve C. Ist F gleichmäßig konvex (d.h. $F'' \geq \theta$ für ein $\theta > 0$), so ist (4) äquivalent zu

$$u_l > u_r. \tag{5}$$

Definition 3. Eine Unstetigkeitskurve C heißt *Schock,* falls die Rankine-Huginot-Bedingung (3) sowie die Entropiebedingung (4) erfüllt sind.

Literatur

[1] L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, AMS 1998