Seminar Geometrie, Wintersemester 2009/10
bei Prof. Dr. C. Bär
Institut für Mathematik der Universität Potsdam

Schwache Lösungen

David Hansen, 16.12.2009

Motivation

Im letzten Vortrag wurde gezeigt, dass die Funktion u, gegeben durch dir *Hopf-Lax-Formel*

$$u(x,t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ t\, L\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\}, \tag{1}$$

Lipschitz stetig und fast überall differenzierbar ist und das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + H(Du) = 0, & \text{f.ü. in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g, & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{2}$$

löst.

Es liegt nun nahe, eine *schwache Lösung* des Anfangswertproblemes (2) eben über diese Eigenschaften zu definieren. Das Beispiel [1, S. 129] zeigt jedoch, dass solche schwachen Lösungen nicht eindeutig zu seien brauchen. Im Folgenden soll nun untersucht werden, welche Einschränkungen notwendig sind, um die Eindeutigkeit sicherzustellen.

Semikonkavität

Definition 1. Eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *semikonkav*, wenn ein $C > 0$ existiert, so dass für alle $x, z \in \mathbb{R}^n$:

$$g(x+z) - 2\,g(x) + g(x-z) \leq C\,|z|^2.$$

Bemerkung 2.

- Die Definition ist äquivalent zu $x \mapsto g(x) - \frac{C}{2}|x|^2$ konkav.
- Ist $g \in C^2$ und $\sup |D^2 g| < \infty$, so ist g semikonkav.

Lemma 3. *Sei u gegeben durch die Hopf-Lax-Formel (1) und sei g semikonkav. Dann existiert ein $C > 0$, so dass für alle $x, z \in \mathbb{R}^n, t > 0$:*

$$u(x+z,t) - 2\,u(x,t) + u(x-z,t) \leq C\,|z|^2.$$

Definition 4. Eine C^2 Funktion $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig konvex*, wenn es ein $\Theta > 0$ gibt, so dass für alle $p, x \in \mathbb{R}^n$:

$$(x, D^2 H(p)\, x) = \sum_{i,j} H_{p_i,p_j}(p)\, x_i x_j \geq \Theta\, |x|^2.$$

Lemma 5. *Sei H gleichmäßig konvex (mit Konstante $\Theta > 0$) und u gegeben durch die Hopf-Lax-Formel (1). Dann gilt für alle $x, z \in \mathbb{R}^n, t > 0$:*

$$u(x+z,t) - 2\,u(x,t) + u(x-z,t) \leq \frac{1}{\Theta\, t}.$$

Eindeutigkeit

Die im vorigen Abschnitt dargelegten Bedingungen für die Semikonkavität für Lösungen der Hopf-Lax-Formel werden im Folgenden benutzt, um Kriterien für die Eindeutigkeit von schwachen Lösungen der Hamilton-Jacobi Gleichung zu erhalten.

Definition 6. Eine Lipschitz stetige Funktion $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ heißt eine *schwache Lösung* des Anfangswertproblemes

$$\begin{cases} u_t + H(Du) = 0, & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g, & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{3}$$

wenn u das Anfangswertproblem fast überall löst:

(a) $u(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R}^n$

(b) $u_t + H(Du) = 0,$ f.ü. auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$,

und ein $C > 0$ existiert, so dass für alle $x, z \in \mathbb{R}^n, t > 0$:

(c) $u(x+z,t) - 2\,u(x) + u(x-z,t) \leq C\, \left(1 + \frac{1}{t}\right)\, |z|^2.$

Theorem 7. *Sei $H \in C^2$, konvex und $\lim_{|p|\to\infty} \frac{H(p)}{p} = +\infty$. Sei des weiteren g Lipschitz stetig. Dann existiert höchstens eine schwache Lösung des Anfangswertproblemes (3).*

Nun folgt unmittelbar aus den Lemmata (3) und (5) und Theorem (7):

Theorem 8. *Seien H und g wie in Theorem (7). Ist g semikonkav oder H gleichmäßig konvex, so ist*

$$u(x,t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ t\, L\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\}$$

die eindeutige schwache Lösung des Anfangswertproblemes (3) der Hamilton-Jacobi Gleichung.

Literatur

[1] L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, AMS 1998