

Die Hopf-Lax Formel

Horst Wendland, 9.12.2009

Problemstellung

In Vortrag geht es um die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_t + H(Du) &= 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u &= g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned}$$

Hierbei ist $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Hamilton-Funktion, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ liefert die Anfangswerte und Du steht für $D_x u = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n})$.

Gesucht wird eine Funktion $u = u(x, t) : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Wir erinnern an die im Vortrag vom 2.12. diskutierten Beziehungen zwischen der Hamilton-Jacobi-PDE, den zugehörigen charakteristischen Gleichungen, den Euler-Lagrange-Gleichungen und der Lösung eines Variationsproblems.

Mit den gleichen Bezeichnungen und den dort gemachten Annahmen für L und w und einer Lipschitz-stetigen Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ machen wir den Ansatz:

$$u(x, t) := \inf_w \left\{ \int_0^1 L(\dot{w}(s)) ds + g(y) \mid w(0) = y, w(t) = x \right\}. \quad (*)$$

(Infimum über alle C^1 Funktionen w)

Hopf-Lax Formel

Wir beweisen nun zunächst einige Formeln zur Berechnung der Lösung des Minimierungsproblems (*).

Satz 1. Hopf-Lax Formel

Ist $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ und $u(x, t)$ die Lösung des Minimierungsproblems (*), dann gilt

$$u(x, t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite der obigen Gleichung heißt die Hopf-Lax Formel.

Der Beweis verwendet u.a. die **Jensenschen Ungleichung** [1, S. 621] für konvexe Funktionen:

Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, $U \subset \mathbb{R}$ offen, beschränkt und $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, gilt

$$f\left(\int_U u dx\right) \leq \int_U f(u) dx.$$

Kennt man $u(\cdot, s)$ für ein $s \in [0, t)$, dann kann mit diesen Werten (*als Anfangsbedingung*) $u(x, t)$ im Intervall $[s, t]$ berechnet werden. Dies ist der Inhalt des folgenden Lemmas.

Lemma 2. Für $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < t$ gilt

$$u(x, t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ (t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + u(y, s) \right\}.$$

Ein weiteres Lemma liefert die Lipschitz-Stetigkeit von $u(x, t)$.

Lemma 3. Ist $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ und $u(x, t)$ die Lösung des Minimierungsproblems (*), dann ist u Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ und es ist $u = g$ auf $\mathbb{R}^n \times \{0\}$.

Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung

Nach diesen Vorbereitungen kann nun gezeigt werden, dass die Hopf-Lax Formel eine Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung liefert.

Satz 4. Lösung der HJG

Ist $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ und ist die im Satz 1 definierte Funktion u im Punkt $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ differenzierbar, dann gilt

$$u_t(x, t) + H(Du(x, t)) = 0.$$

Der Satz wird durch Beweis der zwei Ungleichungen $u_t(x, t) + H(Du(x, t)) \geq 0$ und $u_t(x, t) + H(Du(x, t)) \leq 0$ erbracht, wobei wesentlich eingeht, dass H die **Legendre-Transformierte** von L ist. [1, S. 122]

Zusammenfassend hat man damit bewiesen:

Satz 5. Die durch

$$u(x, t) := \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\}$$

definierte Funktion u ist Lipschitz-stetig, fast überall auf $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ differenzierbar und löst das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + H(Du) &= 0 & \text{fast überall auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u &= g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned}$$

Literatur

[1] L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, AMS 1998