Zur Hamilton-Jacobi-Theorie

Seminar Geometrie WS 2009/2010

Steffen Fröhlich, 2.12.2009

Wir betrachten die Hamiltonsche PDE

$$\begin{array}{rcll} u_t + H(Du) & = & 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u & = & g & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{array} \tag{PDE}$$

mit gegebener Funktion $H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und Anfangsbedingungen $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Zu dieser PDE gehören folgende charakteristischen Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & D_pH(p,x), \\ \dot{y} & = & -D_xH(p,x). \end{array} \tag{ODE}$$

Inhalte des Vortrags

Der Vortrag besteht aus folgenden 3 Themen.

1. Einführung des Wirkungsfunktionals $I(w)$ und Berechnung der zum Variationsproblem $I(w) \mapsto$ extr! gehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen.
2. Nachweis, dass $I(w)$-kritische Punkte dem charakteristischen Hamiltonschen ODE-System genügen.
3. Nachweis, dass die Lagrangedichte L des Funktional $I(w)$ in den Funktionoperator H vermittels der Legendre-Transformation überführt werden kann und umgekehrt.

1. Das Wirkungsfunktional

Zunächst führen wir ein Wirkungsfunktional $I(w)$ ein und berechnen die zugehörigen Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen.

Theorem. *Es sei $x\colon [0,t] \to \mathbb{R}$ kritisch für*

$$I(u) := \int_0^t L(\dot{w}(s), w(s))\,ds.$$

Dann erfüllt $x = x(s)$ die Euler-Lagrangeschen Gleichungen

$$-\frac{d}{ds}D_qL(\dot{x}(s), s(x)) + D_xL(\dot{x}(s), x(s)) = 0 \quad \textit{für alle } x \in [0,t].$$

2. Kritische Punkte und charakteristische Gleichungen

Setze nun

$$p(s) := D_q(\dot{x}(s), x(s)).$$

Voraussetzung. *Es lasse sich $p = D_qL(q,x)$ eindeutig nach $q = q(p,x)$ auflösen.*

Ferner definieren wir den Hamiltonoperator

$$H(p,x) := p \cdot q(p,x) - L(q(p,x),x).$$

Theorem. *Ist $x = x(s)$ kritisch für das Wirkungsfunktional $I(w)$, so gelten*

$$\begin{aligned}\dot{x}(s) &= D_p H(p(s), x(s)),\\ \dot{y}(s) &= -D_x H(p(s), x(s))\end{aligned}$$

mit den vorigen Setzungen für $p(s)$ und $H(p, x)$.

Damit ist ein Zusammenhang zwischen dem Variationsproblem

$$I(w) \longrightarrow \text{extr!}$$

und (ODE) hergestellt.

3. Die Legendre-Transformation

Wie in (PDE) betrachten wir nun Hamiltonoperatoren der Form

$$H = H(p).$$

Voraussetzung. *Wir fordern*

(i) $q \mapsto L(q)$ *ist konvex*

(ii) $\lim\limits_{|q|\to\infty} \dfrac{L(q)}{|q|} = +\infty$

Betrachte nun die Legendre-Transformation

$$L^*(p) := \sup_{q\in\mathbb{R}^n} \Big\{ p \cdot q - L(q) \Big\}.$$

Vorige Annahme über die Asymptotik von $L(q)$ sichert die Existenz eines $q^* \in \mathbb{R}^n$ mit

$$L^*(p) = p \cdot q^* - L(q^*).$$

In diesem Punkt ist also $p = D_q(q^*)$ auflösbar nach $q^* = q(p)$. Das erfüllt die Voraussetzung aus Abschnitt 2. Setzen wir dieses $q^* = q(p)$ in L^* ein, so folgt

$$L^*(p) = p \cdot q(p) + L(q(p)),$$

d.h. es gilt $L^*(p) = H(p)$. Die Legendre-Transformation von L liefert uns demnach H. Es gilt aber auch die Umkehrung.

Theorem. *$L(q)$ erfülle obige Annahmen. Dann gelten*

$$L(q) = H^*(q)$$

sowie

$$\lim_{|p|\to\infty} \frac{H(p)}{|p|} = +\infty.$$

Zusammengefasst gilt also die Dualität

$$L^*(p) = H(p), \quad H^*(q) = L(q).$$

Damit ist ein Zusammenhang zwischen (PDE) und dem Variationsproblem aus Abschnitt 1 hergestellt.