

Spezialfälle und Beispiele

Christian Bär, 25. November 2009

Wir suchen die Lösungen von Differentialgleichungen der Form

$$F(Du(x), u(x), x) = 0$$

auf U mit der Randbedingung

$$u|_{\Gamma} = g$$

wobei $\Gamma \subset U$ eine geeignete glatte Hyperfläche ist und $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene glatte Funktion.

Lineare Differentialgleichungen

Lineare partielle Differentialgleichungen sind die von der Form

$$F(Du(x), u(x), x) = b(x) \cdot Du(x) + c(x) \cdot u(x) = 0,$$

d.h.

$$F(p, z, x) = b(x) \cdot p + c(x) \cdot z.$$

Dabei sind $b : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $c : U \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben (und glatt). Die projizierten Charakteristiken $x(s)$ sind gerade die Integralkurven des Vektorfeldes b . Sie können sich insbesondere nicht kreuzen. $\Gamma \subset U$ ist nichtcharakteristisch genau dann, wenn b längs Γ niemals tangential an Γ ist.

Quasilineare Differentialgleichungen

Quasilineare partielle Differentialgleichungen sind die von der Form

$$F(Du(x), u(x), x) = b(x, u(x)) \cdot Du(x) + c(x, u(x)) = 0,$$

d.h.

$$F(p, z, x) = b(x, z) \cdot p + c(x, z).$$

Dabei sind $b : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $c : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben (und glatt). $\Gamma \subset U$ ist nichtcharakteristisch genau dann, wenn $b(x, g(x))$ längs Γ niemals tangential an Γ ist.

Betrachten wir speziell so genannte *Erhaltungsgesetze*. Dazu schreiben wir statt x_n aus physikalischen Gründen t und $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Es ist $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ gegeben und glatt, $\Gamma = \{t = 0\} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Suche u mit

$$u_t + \operatorname{div}_x(\mathcal{F} \circ u) = 0$$

Wegen $\operatorname{div}_x(\mathcal{F} \circ u) = \mathcal{F}'(u) \cdot D_x u$ ist also

$$F(\tilde{p}, p_n, z, x, t) = p_n + \mathcal{F}'(z) \cdot \tilde{p},$$

wobei $p = (\tilde{p}, p_n)$. Es folgt $D_p F(p, z, x, t) = (\mathcal{F}'(z), 1)$. Insbesondere ist Γ nicht-charakteristisch. Im quasilinearen Fall brauchen wir die p -Komponenten der charakteristischen ODEs nicht zu berücksichtigen und erhalten

$$\begin{cases} \dot{z} &= \mathcal{F}'(z) \cdot \tilde{p} + p_n = 0 \\ \dot{x} &= \mathcal{F}'(z) \\ \dot{t} &= 1 \end{cases}$$

Daher ist $t = s$ und wir benutzen die t -Komponente als Parameter für die Charakteristiken. Da z konstant ist längs der projizierten Charakteristiken, folgt

$$x(t) = x(0) + t \cdot \mathcal{F}'(g(x(0))).$$

Die projizierten Charakteristiken sind also Geraden. Diese können sich kreuzen, da der Richtungsvektor $\mathcal{F}'(g(x(0)))$ mit $x(0)$ variiert!

Hamilton-Jacobi-Gleichung

Hamilton-Jacobi-Gleichungen sind voll nichtlinear und haben die Form

$$u_t + H(D_x u, x) = 0.$$

Dabei ist $H : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene glatte Funktion und wir haben wieder (x, t) statt x geschrieben und $\Gamma = \{t = 0\}$ betrachtet. Es ist also

$$F(p, z, x, t) = p_n + H(\tilde{p}, x)$$

und daher $D_p F = (D_{\tilde{p}} H, 1)$, $D_z F = 0$, $D_x F = D_x H$ und $D_t F = 0$. Insbesondere ist Γ wieder nicht-charakteristisch. Die charakteristischen ODEs ergeben sich zu

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}} &= -D_x H \\ \dot{p}_n &= 0 \\ \dot{z} &= D_{\tilde{p}} H \cdot \tilde{p} + p_n \\ &= D_{\tilde{p}} H \cdot \tilde{p} - H \\ \dot{x} &= D_{\tilde{p}} H \\ \dot{t} &= 1 \end{cases}$$

Es ist also wieder $t = s$ und p_n kann ignoriert werden. Man muss zunächst die *Hamilton-Gleichungen*

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}} &= -D_x H(\tilde{p}, x) \\ \dot{x} &= D_{\tilde{p}} H(\tilde{p}, x) \end{cases}$$

lösen und z anschließend durch Integration von

$$\dot{z} = D_{\tilde{p}} H(\tilde{p}, x) \cdot \tilde{p} - H(\tilde{p}, x)$$

ermitteln.

Literatur

[1] L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, AMS 1998