

Randbedingungen und lokales Existenztheorem

Tobias Jürgens, 18.11.2009

Der Vortrag basiert auf dem Buch von Evans [1, S. 103-109] zusammen mit den Anhängen C.1, C.5 und C.6. Die Notationen wurden größtenteils übernommen.

Seien U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit nichtleerem Rand ∂U und $\Gamma \subseteq \partial U$. Wir suchen eine Funktion $u : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$, die zu gegebenen $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ lokal, d.h. in der Nähe von Γ , eine Lösung ist zum Randwertproblem (RWP)

$$\begin{cases} F(Du, u, x) = 0 \text{ auf } U \\ u = g \text{ auf } \Gamma. \end{cases} \quad (1)$$

Seien $x \in U$ und $I \subset \mathbb{R}$. Wir suchen einen Weg $x(\cdot) : I \rightarrow U \cup \Gamma$, der x mit einem Randpunkt $x^0 \in \Gamma$ verbindet und so die Lösung $u(x(s))$ liefert. Definieren wir $z(s) := u(x(s))$, $p(s) := D_x u(x(s))$, $\dot{\cdot} := \frac{d}{ds}$ und fordern $\dot{x}(s) = D_p F(p, z, x)(s)$, so wurde im vorherigen Vortrag gezeigt, falls u das RWP (1) löst, dass dann die Charakteristiken $(p, z, x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ das charakteristische GDG-System erfüllen

$$\begin{cases} \dot{p} = -D_x F(p, z, x) - D_z F(p, z, x) \cdot p \\ \dot{z} = \langle D_p F(p, z, x), p \rangle \\ \dot{x} = D_p F(p, z, x). \end{cases} \quad (2)$$

1 Randwerte

Bisher wurde noch nichts zu den Anfangswerten (p^0, z^0, x^0) für das GDGS (2) gesagt. Dieses wollen wir letztlich nutzen, um unser ursprüngliches RWP (1) wenigstens für eine kleine Umgebung zu einem gegebenen $x^0 \in \Gamma$ zu lösen.

Flacher Rand

Um die Rechnungen zu vereinfachen, wollen wir erstmal den Rand in einer Umgebung von x^0 flach machen. Dazu gäbe es ein $r > 0$ und eine C^k -Funktion $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, $k \geq 1$, so dass (nach Umbenennung und Umorientierung der Koordinatenachsen) gilt:

$$U \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) \mid x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

Mit Hilfe von γ finden wir eine invertierbare, glatte Abbildungen $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die Γ um x^0 flach legt. Wir definieren

$$\begin{aligned}\tilde{U} &:= \Phi(U), & v(y) &:= u(\Phi^{-1}(y)), & y &\in \tilde{U} \\ \Delta &:= \Phi(\Gamma), & h(y) &:= g(\Phi^{-1}(y)), & y &\in \Delta\end{aligned}$$

Dann gilt $u(x) = v(\Phi(x))$ für $x \in U$ und v erfüllt das RWP

$$\begin{cases} G(Dv, v, y) = 0 \text{ auf } \tilde{U} \\ v = h \text{ auf } \Delta. \end{cases} \quad (3)$$

Dieses hat die gleich Form wie das RWP für u . Wir können im Folgenden also davon ausgehen, dass der Rand nahe x^0 schon flach ist.

Kompatibilitätsbedingungen an die Randwerte

Was sind adäquate Anfangswerte (p^0, z^0, x^0) für das GDGS (2)? Offenbar haben wir $x(0) = x^0$ und $z^0 = g(x^0)$. Differenzieren wir die Randbedingung $u = g$ in der Nähe von x^0 , so folgt $p_i^0 = u_{x_i}(x^0) = g_{x_i}(x^0)$ für $i \in \{1, \dots, n-1\}$ und mit (1) haben wir die

Definition 1. Kompatibilitätsbedingungen

$$\begin{cases} p_i^0 = g_{x_i}(x^0), & i \in \{1, \dots, n-1\} \\ F(p^0, z^0, x^0) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

gefunden.

Definition 2. Ein Tripel (p^0, z^0, x^0) heißt **zulässig**, wenn die Kompatibilitätsbedingungen erfüllt sind.

Im Gegensatz zu z^0 ist p^0 nicht eindeutig durch die Randbedingung und x^0 festgelegt, es muß nicht mal existieren.

Nichtcharakteristische Randwerte

Wir müssen das charakteristische GDGS (2) auch für Punkte in der Nähe von $x^0 \in \Gamma$ lösen und dabei die Kompatibilitätsbedingungen beibehalten. D.h., für $y \in \Gamma$ nahe x^0 wollen wir (2) für die Anfangswerte

$$p(0) = q(y), \quad z(0) = g(y), \quad x(0) = y \quad (5)$$

lösen, so dass

$$q(x^0) = p^0, \quad (6)$$

dass zudem das Tripel $(q(y), g(y), y)$ zulässig ist, d.h.

$$\begin{cases} q_i(y) = g_{x_i}(y), & i \in \{1, \dots, n-1\} \\ F(q(y), g(y), y) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

erfüllt.

Definition 3. Ein zulässiges Tripel (p^0, z^0, x^0) heißt **nichtcharakteristisch**, falls

$$F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0 \quad (8)$$

Lemma 4. (Nichtcharakteristische Randbedingungen) *Ist (p^0, z^0, x^0) nichtcharakteristisch, dann gibt es eine Umgebung W_1 von x^0 , auf der eine eindeutige Lösung $q(\cdot)$ von (6) und (7) existiert.*

Der Beweis dieses Lemmas benutzt den Satz über die implizite Funktion. Wir können somit $p(0)$ durch y mittels $q(\cdot)$ ausdrücken.

Bemerkung 5. Für nicht flaches Γ ist ein Tripel (p^0, z^0, x^0) nichtcharakteristisch, falls

$$\langle D_p F(p^0, z^0, x^0), \nu(x^0) \rangle \neq 0,$$

wobei ν das äußere Einheitsnormalenfeld von Γ bezeichnet.

2 Lokale Lösungen

Sei (p^0, z^0, x^0) ein nichtcharakteristisches Tripel, dann existiert nach Lemma 4 ein q , so dass $(q(y), g(y), y)$ zulässig ist für alle $y = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0)$ aus der Umgebung W_1 von x^0 . Um die Abhängigkeiten zu verdeutlichen, schreiben wir für die Lösungen des charakteristischen GDGS (2) mit den Anfangswerten (5)

$$\begin{cases} p(s) = p(y, s) \\ z(s) = z(y, s) \\ x(s) = x(y, s). \end{cases} \quad (9)$$

Es geht immer noch darum, Lösungen für unser ursprüngliches RWP (1) zu finden. Dazu wollen wir (y, s) zugunsten von x eliminieren und dabei hilft uns das folgende

Lemma 6. (Lokale Invertierbarkeit) *Das Tripel (p^0, z^0, x^0) sei nichtcharakteristisch. Dann gibt es ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ um 0, eine Umgebung $W \subset \Gamma$ von x^0 und eine Umgebung $V \subset U$ von x^0 , so dass für alle $x \in V$ eindeutige $s \in I$, $y \in W$ existieren mit*

$$x = x(y, s). \quad (10)$$

Die Abbildungen $x \mapsto s, y$ sind glatt.

Hier nutzt man für den Beweis den Satz von der Umkehrfunktion. Wir haben also eindeutige Lösungen

$$y = y(x), \quad s = s(x)$$

von (10) zumindest in einer kleinen Umgebung von x^0 . Definieren wir zuletzt

$$\begin{cases} u(x) := z(y(x), s(x)) \\ p(x) := p(y(x), s(x)). \end{cases} \quad (11)$$

Dass wir die Lösungen des charakteristischen GDGS lokal zu Lösungen des RWP zusammenweben können, sichert der krönende Abschluß des Vortrags:

Satz 7. (Lokaler Existenzsatz) *Die Funktion u wie gerade definiert ist C^2 und löst die PDG*

$$F(Du, u, x) = 0, \forall x \in V$$

mit den Randbedingungen

$$u(x) = g(x), \forall x \in W$$

Literatur

[1] L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, AMS 1998