Seminar Geometrie, Wintersemester 2009/10
bei Prof. Dr. C. Bär
Institut für Mathematik der Universität Potsdam

Charakteristiken

Ernesto Nungesser, 11.11.09

Methode der Charakteristiken

Der besprochene Stoff entspricht [1, S. 97-102]. Wir betrachten die allgemeine nichtlineare partielle Differentialgleichung der Form

$$F(Du, u, x) = 0 \tag{1}$$

wobei $x \in U$ und U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{U} \mapsto \mathbb{R}$ ist gegeben und $u : \overline{U} \mapsto \mathbb{R}$ ist die Unbekannte, $u = u(x)$. Wir werden davon ausgehen, dass wir noch folgende Randbedingung haben:

$$u = g \text{ auf } \Gamma \tag{2}$$

wobei $\Gamma \subseteq \partial U$ und $g : \Gamma \mapsto \mathbb{R}$ gegeben sind. Desweiteren $F, g \in C^\infty$. Die Methode der Charakteristiken besteht darin die partielle Differentialgleichung in ein geeignetes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen umzuwandeln. Die intuitive Idee ist eine Kurve in U zu finden, die einen beliebigen Punkt x in U mit dem Rand verbindet, wo wir ja die Funktion u kennen.

Herleitung der charakteristischen GDG

Wie kann man diese Kurve finden? Nehmen wir an wir können sie durch die Funktion $\mathbf{x}(s) = (x^1(s), ..., x^n(s))$ darstellen, dessen Parameter s in einem Teilintervall von $\mathbb{R}$ liegt. Wir nehmen an, dass die Lösung zu (1) u C^2 ist und definieren

$$z(s) \equiv u(\mathbf{x}(s)) \tag{3}$$

$$p(s) \equiv Du(\mathbf{x}(s)) \tag{4}$$

Wenn wir diese letzte Gleichung differenzieren kommen wir auf

$$\dot{p}^i = \sum_{j=1}^{n} u_{x_i x_j}(\mathbf{x}(s))\dot{x}^j(s); \; (\dot{} = \frac{d}{ds}) \tag{5}$$

um die Ableitung zweiter Ordnung zu eliminieren, werden wir unsere Kurve zwingen in folgende Richtung zu gehen:

$$\dot{x}^j(s) = \frac{\partial F}{\partial p_j}(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) \tag{6}$$

Diese Gleichung ist auch gleichzeitig eine unserer gesuchten GDG. Wenn wir (1) nach x_i ableiten, erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_j} u_{x_j x_i} + \frac{\partial F}{\partial z} u_{x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \tag{7}$$

Wenn wir diese Gleichung mit $x = \mathbf{x}(s)$ und (6) in (5) einsetzen kommen wir auf die zweite gewünschte GDG. Die Ableitung von (3) unter Beachtung von (6) ergibt die dritte Gleichung. Zusammengefasst sind wir auf folgende **charakteristischen** Gleichungen der nicht-linearen partiellen Differentialgleichung (1), die ein System von $2n+1$ gewöhnliches Differentialgleichungen darstellen gekommen:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}}(s) &= -D_x F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) - D_z F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s))\mathbf{p}(s) && (8)\\
\dot{z}(s) &= D_p F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s))\mathbf{p}(s) && (9)\\
\dot{\mathbf{x}}(s) &= D_p F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) && (10)
\end{aligned}$$

wobei hier folgende Notation benutzt wurde: $D_p F = (F_{p_1}, \ldots, F_{p_n})$, $D_z F = F_z$ und $D_x F = (F_{x_1}, \ldots, F_{x_n})$. Die Funktionen $\mathbf{p}\cdot$, $z(\cdot)$ und $\mathbf{x}(\cdot)$ nennt man **Charakteristiken**. Durch Konstruktion haben wir folgendes gezeigt:

Satz: Sei $u \in C^2(U)$ eine Lösung von (1). Nehmen wir an $\mathbf{x}(\cdot)$ ist eine Lösung von (10), dann löst $\mathbf{p}(\cdot)$ (8) und $z(\cdot)$ (9) für alle s mit $\mathbf{x}(s) \in U$

Es wäre natürlich schön zu wissen welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit man diesen Satz anwenden kann. Welche das sind werden wir im nächsten Vortrag erfahren...
Beispiel(Quasilineare PDG): Für den Fall einer quasilinearen PDG, d.h. einer PDG der Form

$$F(Du, u, x) = \mathbf{b}(x, u(x)) \cdot Du(x) + c(x, u(x)) = 0 \tag{11}$$

ist $D_p F = \mathbf{b}(x, z)$ und die charakteristischen GDG sind:

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(s), z(s)) \tag{12}$$

$$\dot{z}(s) = -c(\mathbf{x}(s), z(s)) \tag{13}$$

Die Gleichung für $\mathbf{p}(\cdot)$ wird nicht gebraucht, warum das so ist, werden wir in den nächsten beiden Vorträgen besser verstehen. Falls c Null ist, was in vielen physikalischen Problemen der Fall ist, ist die gesuchte Funktion konstant entlang der Charakteristiken.

Literatur

[1] L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, AMS 1998