

Nichtlineare PDEs erster Ordnung

Frank Pfäffle, 4. November 2009

Der Vortrag lehnt sich eng an der Literaturvorlage [1, S. 91-96] an.

Eine *partielle Differentialgleichung* (PDE) *erster Ordnung* ist ein Ausdruck der Form

$$F(Du, u, x) = 0. \quad (*)$$

Dabei ist $x \in U$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, und eine (im Allgemeinen nicht-lineare) Funktion $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ist vorgegeben. Gesucht ist eine Funktion $u : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$, die die Gleichung $(*)$ erfüllt, d.h.

$$\forall x \in U : \quad F(Du(x), u(x), x) = 0.$$

Dabei bezeichnet $Du(x)$ den Gradienten von u im Punkt x .

Typisches Problem (Randwertproblem):

Finde zu vorgegebenen $\Gamma \subset \partial U$ und $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung u von $(*)$ mit $u|_{\Gamma} = g$.

Vollständige Integrale und Einhüllende

Definition 1. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Eine C^2 -Funktion $u : U \times A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *vollständiges Integral*, falls gilt:

1. Für jedes $a \in A$ ist die Funktion $x \mapsto u(x; a)$ eine Lösung von $(*)$, und
2. auf $U \times A$ hat in jedem Punkt die $n \times (n+1)$ -Matrix

$$(D_a u, D_{a,x}^2 u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial a_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial a_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial a_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial a_n} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial a_n} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial a_n} \end{pmatrix}$$

maximalen Rang n .

Bemerkung 2. Die Bedingung 2. in der Definition stellt sicher, dass $a \mapsto u(x; a)$ von allen n unabhängigen Parametern $a_1, \dots, a_n$ abhängt und sich die Zahl der unabhängigen Parameter nicht reduzieren lässt.

Definition 3. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $A \subset \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen. Sei $u : U \times A \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion, und sei $\phi : U \rightarrow A$ eine weitere C^1 -Funktion mit

$$D_a u(x; \phi(x)) = 0 \quad \forall x \in U.$$

Dann bezeichnet man die Funktion $v : U \rightarrow \mathbb{R}$, die durch $v(x) = u(x; \phi(x))$ definiert ist, als *Einhüllende* der Funktionenmenge $\{u(\cdot; a)\}_{a \in A}$.

Mit Hilfe von Einhüllenden kann man, wenn man für (*) bereits eine Familie von Lösungen gefunden hat, weitere Lösungen finden. Dies besagt der folgende Satz.

Satz 4. Für jedes $a \in A$ erfülle $u = u(\cdot; a)$ die partielle Differentialgleichung (*), und für die Funktionenmenge $\{u(\cdot; a)\}_{a \in A}$ existiere eine Einhüllende v , die C^1 ist. Dann ist auch v eine Lösung von (*).

Eine solche Einhüllende v nennt man auch *singuläres Integral* von (*).

Noch mehr Lösungen für (*) erhält man aus einem vollständigen Integral $\{u(\cdot; a)\}_{a \in A}$ durch die folgende Konstruktion:

Sei $A' \subset \mathbb{R}^{n-1}$, und sei $h : A' \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion, deren Graph in A enthalten ist. Wir schreiben $a = (a_1, \dots, a_n) = (a', a_n)$ mit $a' = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Definition 5. Eine Einhüllende $v' = v'(x)$ für die Funktionenmenge $\{u'(\cdot; a')\}_{a' \in A'}$ mit $u'(x; a') = u(x; a', h(a'))$ heißt *allgemeines Integral* (von der Wahl von h abhängig), sofern eine solche Einhüllende existiert und C^1 ist.

Bemerkung 6. Durch die Konstruktion allgemeiner Integrale findet man im Allgemeinen nicht alle Lösungen von (*), selbst wenn man alle möglichen Funktionen h in Betracht zieht.

Literatur

[1] L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, AMS 1998