Seminar Geometrie, Wintersemester 2009/10
bei Prof. Dr. C. Bär
Institut für Mathematik der Universität Potsdam

Überblick ODE's

Volker Branding, 28.10.2009

Einführung

Eine explizite *ODE* erster Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$y' = f(x, y)\,. \tag{1}$$

Hier ist $G \subset \mathbb{R}^2, f : G \to \mathbb{R}$ mit $(x, y) \mapsto f(x, y)$ stetig. Wichtige Eigenschaften, wie Existenz und Eindeutigkeit von Gleichung (1) werden wesentlich durch die Gegebenheiten der rechten Seite bestimmt. Lösungen von Differentialgleichungen besitzen immer Integrationskonstanten, die durch *Anfangs-* oder *Randbedingungen* fixiert sind. Daher unterscheiden wir zwischen

- *Anfangswertproblemen*(AWP), z.B. $y' = f(y)$ in $[0, 1]$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$
- *Randwertproblemen*(RWP), z.B. $y' = 3f(y)$ in $[-1, 1]$ mit der Randbedingung $y(1) = 5$

Was genau verstehen wir unter einer Lösung einer Differentialgleichung?

Definition 1. Eine Lösung von (1) ist eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit

- Der Graph von φ ist in G enthalten, $\Gamma_\varphi = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} | y = \varphi(x)\} \subset G$
- Es gilt $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \qquad \forall x \in I$.

Eine Gleichung des Typs (1) erlaubt eine geometrische Interpretation. Für $G \subset \mathbb{R}^2$ wird jedem Punkt $(x, y) \subset G$ durch $y' = f(x, y)$ eine Steigung zugeordnet. Daher sagen wir, (1) definiert ein *Richtungsfeld*.

Eine explizite Differentialgleichung *n-ter* Ordnung(Setup wie zuvor) ist von der Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})\,, \tag{2}$$

wobei $y^{(n)}$ die *n-te* Ableitung der Funktion y bezeichnet. Wir halten fest:

- Es ist immer möglich, eine *Differentialgleichung n-ter Ordnung* auf n *Differentialgleichungen erster Ordnung* zurückzuführen. Dies ist besonders in der Anwendung sehr nützlich, da sich Differentialgleichungen erster Ordnungen im Allgemeinen leichter lösen lassen.
- Um eine Differentialgleichung n-ter Ordnung zu lösen, müssen n Integrationskonstanten angegeben werden.

Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung

Die naheliegende Verallgemeinerung von (1) auf den n-dimensionalen Fall ergibt sich wie folgt

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \qquad \vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,\vec{y}) \\ \vdots \\ f_n(x,\vec{y}) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Eine Gleichung der Form

$$\vec{y}' = \vec{f}(x,\vec{y}) \tag{4}$$

wird ein *System von Differentialgleichungen* genannt. In Komponenten geschrieben bedeutet dies

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Existenz und Eindeutigkeit

Im Folgenden wollen wir das folgende Anfangswertproblem betrachten

$$y' = f(x,y), \qquad y(a) = c. \tag{6}$$

Dabei sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n$ sei C^1. Nun formulieren wir den Existenzsatz von *Picard-Lindelöf*.

Satz 2 (Existenz und Eindeutigkeitssatz)**.** *Zu jedem* $(a,c) \in G$ *gibt es ein* $\epsilon > 0$ *und eine eindeutige Lösung von (6) im Intervall* $[a-\epsilon, a+\epsilon]$.

Beweis. Der Beweis benutzt den *Banachschen Fixpunktsatz* und das Verfahren der *sukzessiven Approximation.* [2], S.64 □

Man kann zeigen, dass im linearen Fall obiger Satz die globale Existenz der Lösung sicherstellt, im nicht-linearen Fall stimmt dies hingegen nicht, wie das einfach Beispiel $y' = y^2$ zeigt.

Stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten

Der folgende Satz beschreibt die Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsdaten. Dazu nehmen wir an, dass die Funktion f im Rechteck

$$R : \{(t, u) \in \mathbb{R}^{n+1} | |t - t_0| \leq a, ||u - y_0|| \leq b\} \tag{7}$$

definiert ist.

Satz 3. *Seien $y, \tilde{y}$ Lösungen der Anfangswertprobleme*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \qquad \tilde{y}' = \tilde{f}(x, \tilde{y}), \quad \tilde{y}(x_0) = \tilde{y}_0\,. \tag{8}$$

Wenn $||y_0 - y_1|| < \delta_1$ und $\sup\limits_{(u,t)} ||f(t, u) - \tilde{f}(t, u)|| \leq \delta_2$, dann gilt

$$||y(t) - \tilde{y}(t)|| \leq C(\delta_1, \delta_2, R), \qquad \lim_{\delta_1, \delta_2 \to 0} C = 0 \tag{9}$$

Der obige Satz stellt somit sicher, dass die Lösung stetig von den Anfangsdaten abhängt.

Lineare Differentialgleichungen

Definition 4. Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, A eine $(n \times n)$ Matrix mit stetigen Einträgen. Dann nennen wir

$$y' = A(x)y \qquad \text{homogenes lineares Differentialgleichungssystem} \tag{10}$$

$$y' = A(x)y + b(x) \qquad \text{inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem} \tag{11}$$

Damit formulieren wir den folgenden

Satz 5. *$I \subset \mathbb{R}$ offen, $A : I \to M(n \times n, \mathbb{R}), b : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\forall x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ mit Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = c$ des inhomogenen Systems $y' = A(x)y + b(x)$.*

Definition 6. Unter einem *Lösungs-Fundamentalsystem* der Differentialgleichung $y' = A(x)y$ versteht man eine Basis $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ des Vektorraums seiner Lösungen.

Der folgende Satz beschreibt eine Lösungsmethode für inhomogene Systeme.

Satz 7 (Variation der Konstanten)**.** *Sei Φ ein Lösungs-Fundamentalsystem der DGL $y' = A(x)y$. Dann erhält man eine Lösung $\Psi : I \to \mathbb{R}^n$ des inhomogenen Systems durch den Ansatz*

$$\Psi(x) = \Phi(x)u(x)\,. \tag{12}$$

Die Funktion u ist bestimmt durch $b(x) = \Phi(x)u'(x)$.

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit kontanten Koeffizienten

Das Lösen dieses Typs von Gleichungen ist äquivalent der Nullstellenbestimmung eines bestimmten Polynoms. Betrachte dazu den Differentialoperator

$$P(D) = a_0 + a_1 D + \cdots + a_n D^n, \qquad D = \frac{d}{dx} \tag{13}$$

Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung lässt sich damit schreiben als $P(D)y = 0$.

Satz 8. *Das Polynom P habe n paarweise voneinander verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Dann bilden $\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\varphi_k(x) = e^{\lambda_k x}$ ein Fundamentalsystem der DGL $P(D)y = 0$.*

Das Resultat kann leicht auf den inhomogenen Fall verallgemeinert werden.

Systeme von linearen Differentialgleichungen mit kontanten Koeffizienten

Satz 9. *Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C}), a \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h. $Aa = \lambda a$. Dann ist*

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, \qquad \varphi(x) := a e^{\lambda x} \tag{14}$$

eine Lösung der DGL $y' = Ay$.

Wir haben es hier also effektiv mit einem Eigenwerproblem zu tun!

Literatur

[1] L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, AMS 1998

[2] Wolfgang Walter: *gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer 2000

[3] Otto Forster: *Analysis 2*, Vieweg 1999