Expandergraphen

Sandy Roigk

23.06.2010

Seminar Geometrie, Sommersemester 2010
bei Prof. Dr. C. Bär
Institut für Mathematik der Universität Potsdam

Vorbemerkungen:

$Nachbarmenge : N(X) = \{y | \exists x \in X : y \sim x\}$

typische Definition: G sein ein k-regulärer Graph mit n Knoten. G ist ein c-Expander genau dann, wenn

$$\forall S \subset V : |\delta S| \geq c(1 - \frac{|S|}{n})|S|$$

wobei c der Expanderkoeffizient ist.

optimaler Definition:

$$c' = \sup_{S \subseteq V(G)} \frac{|\delta(S)|n}{|S||\overline{S}|}$$

Bemerkung: 1. Ist c' > 0, so ist G ein c' - Expander
2. Expandergraph in Verbindung mit Cheeger - Konstante $g_G := \inf_S \frac{vol\delta S}{min(volS, vol\overline{S})}$

$$c' \geq g_G \geq \frac{1}{2}c'$$

Lemma 1
Sei G ein nicht-vollständiger Graph. Für den Knotenrand gilt

$$\delta(S) = \{x \notin S : x \sim y \in S\}.$$

Setze

$$\lambda = \frac{2\lambda_1}{\lambda_{n-1} + \lambda_1}.$$

Dann gilt für jede Teilmenge

$$S \subset V : \frac{vol\delta(S)}{vol(S)} \geq \lambda(2-\lambda)\frac{vol\overline{S}}{volG}$$

G ist ein $\lambda(2-\lambda) - Expander.$

Korollar 2
Ist G ein k - regulärer Graph, so gilt

$$|\delta S| = \frac{1}{k} vol(\delta S) \geq \lambda(2-\lambda)\frac{k|\overline{S}|k|S|}{kk|v|}$$

Lemma 3
Sei G nicht vollständig und $S \subset V(G)$. Setze $\overline{\lambda} = max_{i \neq 0}|1-\lambda_i|$. Dann gilt für die Nachbarmenge N(S)

$$\frac{volN(S)}{vol(S)} \geq \frac{1}{1-(1-\overline{\lambda}^2 \frac{vol(\overline{S})}{volG})}$$

Lemma 4
Ist G ein k - regulärer Graph mit n Knoten und nicht vollständig. Setze $\overline{\lambda} = max_{i \neq 0}|1-\lambda_i|$. Für $S \subseteq V(G)$ gilt für die Nachbarmenge N(S)

$$\frac{|N(S)|}{|S|} > \frac{1}{\overline{\lambda}^2 + (1-\overline{\lambda}^2)\frac{|S|}{n}} = \frac{1}{1-(1-\overline{\lambda}^2)\frac{|S|}{n}}$$

Lemma 5
Sei G $= X \cup Y$ ein k - regulärer, bipartiter Graph mit n $= \#X = \#Y$. Definiere für $x \in X$ und $y \in Y$ eine Matrix M durch

$$M_{xy} = \{ \begin{array}{l} 1, fallsx \sim y \\ 0, sonst. \end{array}$$

Dann istk^2 der größte Eigenwert von M*M. Der zweitgrößte Eigenwert wird mit $\rho^2 k^2 (0 \geq \rho \geq 1)$ bezeichnet. Dann gilt für jede Teilmenge S $\subset X$

$$\frac{\#N(S)}{\#S} \geq \frac{1}{\rho^2 + (1-\rho^2)\frac{\#S}{n}} = \frac{n}{\#S + (1-\rho)^2 \#S}$$

Literatur

[1] F. Chung: *Spectral Graph Theory*, Amer. Math. Soc. 1997