

Durchmesser und Eigenwerte

Matthias Lowin, 16. Juni 2010

Definition 1 Ist v ein Knoten eines Graphen $G = (V, E)$,
dann nennt man die Zahl

$$d_v = \#\{e \in E \mid v \in e\}$$

den Grad von v .

Definition 2 Es sei G ein Graph, v seien die Knoten von G
und d_v sei der Grad von v . Dann heißt

$$\text{vol}G = \sum_v d_v$$

das Volumen von G .

Definition 3 Es sei G ein Graph und u und v Knoten in G ,
dann bezeichnet $d(u, v)$ den Abstand zwischen u und v .
Dieser ist definiert durch den kürzesten Weg, der u und v verbindet.

Definition 4 Der Durchmesser eines Graphen G , bezeichnet durch $D(G)$,
ist der maximale Abstand von allen Paaren von Knoten in G .

Definition 5 Seien X und Y Teilmengen in $V(G)$.
Dann bezeichnet

$$d(X, Y) = \min\{d(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

den Abstand zwischen X und Y .

Vereinbarung Sei $\overline{X}$ das Komplement einer Menge X in $V(G)$.

Theorem 6 Sei G ein Graph und $X, Y \subset V(G)$, mit $d(X, Y) \geq 2$.
Dann gilt:

$$d(X, Y) \leq \left\lceil \frac{\log \sqrt{\frac{vol \bar{X} vol \bar{Y}}{vol X vol Y}}}{\log \frac{\lambda_{n-1} + \lambda_1}{\lambda_{n-1} - \lambda_1}} \right\rceil$$

Korollar 7 Sei G ein regulärer, nicht vollständiger Graph.
Dann gilt:

$$D(G) \leq \left\lceil \frac{\log(n-1)}{\log \frac{\lambda_{n-1} + \lambda_1}{\lambda_{n-1} - \lambda_1}} \right\rceil$$

Theorem 8 Sei G ein nicht vollständiger Graph, sowie $X, Y \subset V(G)$
und $X \neq \bar{Y}$. Dann gilt:

$$d(X, Y) \leq \left\lceil \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{vol \bar{X} vol \bar{Y}}{vol X vol Y}}}{\cosh^{-1} \frac{\lambda_{n-1} + \lambda_1}{\lambda_{n-1} - \lambda_1}} \right\rceil$$

Lemma 9 Für alle $X \subseteq V(G)$, gilt

$$\frac{vol \delta X}{vol X} \geq \frac{1 - (1 - \lambda)^2}{(1 - \lambda)^2 + \frac{vol X}{vol \bar{X}}}$$

$$\text{,wobei } \lambda = \frac{2\lambda_1}{(\lambda_{n-1} + \lambda_1)}.$$

Korollar 10 Für $X \subseteq V(G)$ mit $vol X \leq vol \bar{X}$, wobei G kein vollständiger Graph ist, gilt

$$\frac{vol \delta X}{vol X} \geq \lambda$$

$$\text{,wobei } \lambda = \frac{2\lambda_1}{(\lambda_{n-1} + \lambda_1)}.$$

Literatur

[1] F. Chung: *Spectral Graph Theory*, Amer. Math. Soc. 1997