Seminar Geometrie, Sommersemester 2010
bei Prof. Dr. C. Bär
Institut für Mathematik der Universität Potsdam

Kartesische Produkte von Graphen,ihr Spektrum und isoperimetrische Ungleichungen

Patrice Arnaud Kesse, 09.Juni 2010

Kartesische Produkte von Graphen

- Es seien $G = (V_g, E_g), H = (V_h, E_h)$ zwei Graphen mit $V_g = (u_1, u_2, ...), V_h = (v_1, v_2, ...), V_g \cap V_h = \emptyset$
  Alle folgenden Operationen für die Graphen G und H ergeben einen Graphen, dessen Knotenmenge V das kartesische Produkt $V_g \times V_h = ((u_i, v_j) : u_i \in V_g, v_j \in V_h)$ ist.

- Definition 1
  Zwei Knoten (u_i, v_j) und (u_k, v_l) des kartesischen Produktes $G\Box H$ von G und H sind genau dann adjazent, wenn $u_i = u_k$ und $v_j v_l \in E_h$ gilt oder $v_j = v_l$ und $u_i u_k \in E_g$ gilt . Formal: $E(G\Box H) = ((u_i, v_j)(u_k, v_l) : (u_i = u_k \wedge v_j v_l \in E_h) \vee (v_j = v_l \wedge u_i u_k \in E_g)$.

- Bemerkung
  Der Graph $G \times H$ entsteht, wenn man jeden Knoten von G durch eine Kopie von H ersetzt und entsprechende Knoten in verschiedenen Kopien von H genau dann verbindet, wenn die zugehörigen Knoten in G benachbart sind.

- Definition 2
  Sei $\omega :\rightarrow R_{\geq 0}$ eine Gewichtsfunktion, die jeder Kante $\alpha \in E$ ihr Gewicht $\omega\big(\alpha\big)$ zuordnet mit $\alpha := (u, v)$. G' , G zwei Graphen mit Gewichtsfunktionen ω und ω'. Das gewichtete kartesische Produkt $G \otimes G'$ mit Knotenmenge $V\big(G\big) \times V\big(G'\big)$ und Gewichtsfunktion $\omega \otimes \omega'$ ist definiert als : Betrachten eine Kante $(u, v) \in E\big(G\big)$ so ist $\omega \otimes \omega'((u, v'), (v, v')) = \omega(u, v)\omega'(v')$ und für eine Kante $(u', v') \in E\big(G'\big)$ gilt : $\omega \otimes \omega'((u, u'), (u, v')) = \omega(u)\omega'(u', v')$.

- Bemerkung
  Das kartesische Produkt bezüglich konsistenten Gewichtsfunktionen ist nicht assoziativ, d.h. $G \otimes G' \otimes G'' \neq (G \otimes G') \otimes G''$.

Isoperimetrische Ungleichungen von kartesischen Produkten

- Definition 3
  Eine Gewichtsfunktion ω ist konsistent, wenn folgendes gilt : $\sum_u \omega\big(u, v\big) = \omega\big(v\big)$.

- Bemerkung
  Wenn wir nun konsistente Gewichtsfunktionen betrachten, so ist das Gewicht eines Knoten $\alpha := (u, v)$ in $G \otimes G'$ genau $2 * \omega(u) * \omega'(v)$.

- Bemerkung
  Eine konsistente Gewichtsfunktion mit G als Graphen hat Kantengewicht 1 und Knotengewicht d_α für jeden Knoten α.

Lemma 1. *Seien $\lambda_1, ..., \lambda_n$ Eigenwerte der Adjazenzmatrix eines Graphen g und $\mu_1, ..., \mu_m$ Eigenwerte der Adjazenzmatrix des Graphen H. So sind die EW. der Adjazenzmatrix des Kartesischen Produktes $G \Box H$ gegeben durch $\lambda_i + \mu_j$ für $n \geq i \geq 1$ und $m \geq j \geq 1$.*

Satz 1. *Mit der obigen Bemerkung genügt der Eigenwert eines gewichteten kartesischen Produktes von Graphen $G_1, G_2, ..., G_k$*
$\lambda_{G_1 \otimes G_2 \otimes ... \otimes G_k} = \frac{1}{k} \min(\lambda_{G_1}, \lambda_{G_2}, ..., \lambda_{G_k})$ *. wobei $\lambda_G = \lambda_1$.*

Satz 2. *Die Cheeger Konstanste eines gewichteten kartesischen Produktes von $G_1, G_2, ..., G_k$ genügt:*
$\frac{1}{k} \min(h_{G_1}, h_{G_2}, ..., h_{G_k}) \geq h_{G_1 \otimes G_2 \otimes ... \otimes G_k} \geq \frac{1}{2k} min(h_{G_1}, h_{G_2}, ..., h_{G_k})$

Corollar 1. *Für einen Graphen G ist : $h(G, \omega) \geq \inf_f \frac{\sum_{x \sim y} |f(x) - F(y)| \omega(x,y)}{\sum_{x \in V} |f(x)| \omega(x)} \geq \frac{1}{2} h(G, \omega)$,wobei $f : V(G) \rightarrow R$ genügt : $\sum_{x \in V} f(x) \omega(x) = 0$*

Corollar 2. *Die modifizierte Cheeger konstante des kartesischen Produktes von $G_1, G_2, ..., G_k$ genügt : $min(h'_{G_1}, h'_{G_2}, ..., h'_{G_k}) \geq h'_{G_1 \Box G_2 \Box ... \Box G_k} \geq \frac{1}{2} \min(h'_{G_1}, h'_{G_2}, ..., h'_{G_k})$*

Literatur

[1] F. Chung: *Spectral Graph Theory*, Amer. Math. Soc. 1997

[2] $http : //www.math.sc.edu/ \ lu/teaching/2009spring_778S/adjeig.pdf$